

RECOPILACIÓN DE SEMINARIOS PRE-UNI

ÁLGEBRA - I

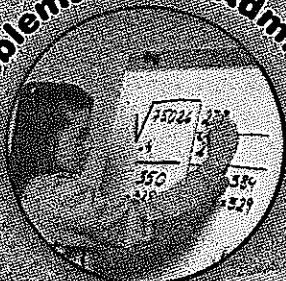
CURSO COMPLETO

PROBLEMAS RESUELTOS

Tipo Admisión
UNI



Problemas Tipo Admisión

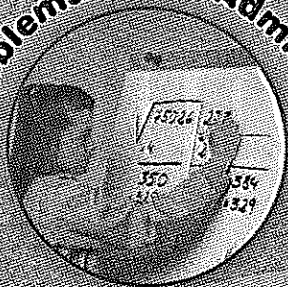


ÍNDICE

PRE - UNI

	Página
☉ PRIMER SEMINARIO 2005 - II	7
Polinomios especiales	
Productos notables	
División de Polinomios	
- Teorema del resto	
- Divisibilidad	
- Cocientes notables	
Factorización	
Radicación - Racionalización	
Lógica proposicional	
☉ SEGUNDO SEMINARIO 2005 - II	43
Teoría de conjuntos	
Números reales	
Ecuaciones diversas	
Inecuaciones	
☉ TERCER SEMINARIO 2005 - II	89
Inecuaciones diversas	
Valor absoluto	
Funciones diversas	
- Dominio y Rango	
- Gráficas	

ÁLGEBRA



ÍNDICE

PRE - UNI

	Página
☉ CUARTO SEMINARIO 2005 - II	139
Funciones diversas	
- Dominio y Rango	
- Funciones Acotadas	
Logaritmos	
- Propiedades, ecuaciones e inecuaciones	
Gráficas de polinomios	
- Multiplicidad de raíces	
- Propiedad de raíces	
☉ QUINTO SEMINARIO 2005 - II	185
Números complejos	
Matrices y determinantes	
Sistema de ecuaciones lineales	
☉ SEXTO SEMINARIO 2005 - II	233
Inecuaciones	
- Gráficas	
Sucesiones y series	
Progresión aritmética y geométrica	
Factorial	
Análisis combinatorio	
Binomio de Newton	

PRIMER SEMINARIO TALLER DE ÁLGEBRA

PRE-UNI 2005-II

CONTIENE:

- **POLINOMIOS ESPECIALES**
- **PRODUCTOS NOTABLES**
- **DIVISIÓN DE POLINOMIOS**
 - *Teorema del resto*
 - *Divisibilidad*
 - *Cocientes notables*
- **FACTORIZACIÓN**
- **RADICACIÓN - RACIONALIZACIÓN**
- **LÓGICA PROPOSICIONAL**



LIMA - PERÚ

01. Si P es un polinomio sobre $\mathbb{R}$ definido por:

$$P(x, y) = x^{2n+m-15} + x^{m-n}y^{5-n} + \frac{1}{5-m}x^{6-m}$$

entonces el valor en $T = 3m - 4n$, es:

- A) -2 D) 1
B) -1 E) 2
C) 0

02. Si P es un polinomio definido por:

$$P(x) = (5x - 1)^{2n-1} (2x + 5)^n + [(3x + 1)(x+5)]^n + (x^2 + n)(x - 2).$$

Tal que tienen como término independiente -36 , entonces el grado del polinomio P es:

- A) 18 D) 45
B) 53 E) 36
C) 37

03. Si P es un polinomio definido por:

$$P(x, y) = 4x^{a+1}y^{b-2} + 3x^{a+2}y^{b-1} + 6x^{a+3}y^{b-2} \text{ tal que:}$$

$GA(P) = 20$ y $GA(P_x) = 8$, entonces el valor de $T = a \cdot b$, es:

- A) 71 D) 69
B) 70 E) 72
C) 68

04. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $GA(P + Q) \leq GA(P) + GA(Q)$
II. $GA(P - Q) \leq GA(P) + GA(Q)$
III. $GA(P^n) = (GA(P))^n$; $n \in \mathbb{N}$
IV. $GA(PQ) = GA(P) + GA(Q)$

Si M y N son los números respectivamente de las proposiciones verdaderas y

falsas, entonces la relación correcta, es:

- A) $N > M$ D) $N = M$
B) $N = 2M$ E) $M = N + 1$
C) $M = 2N$

05. Dados dos polinomios P y Q (definido en la variable x), Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si $GA(P) = 5$ y $GA(Q) = 5$ entonces $GA(P + Q) = 5$
II. Si $GA(P - Q) = 5$, entonces $GA(Q) < 5$
III. Si $GA(P) > 1$ y $GA(P^3 \cdot Q^2) = 13$, entonces $GA(PQ) = 6$

- A) FFV D) VVV
B) VFF E) FFF
C) FVF

06. Se tienen 3 polinomios enteros P , Q y R (definidos en la variable x) si se sabe que la suma de los grados de Q y R excede en 10 unidades al grado de P ; también

el grado de $\sqrt[4]{P^2 \cdot QR}$ es 10 y el

grado de $\frac{(P \cdot Q)^3}{R^4}$ es 34, entonces

la diferencia de los grados de Q y P , es:

- A) 6 D) 4
B) -2 E) 0
C) 2

07. Sea P un polinomio definido por:

$$P(x) = (1 + 2x)^n + (1 + 3x)^n$$

tal que La suma de coeficientes excede en 23 al término independiente,

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El polinomio $P(x)$ es de grado 2.
II. La suma de sus coeficientes es 25.

III. El término cuadrático de $P(x)$ es $12x^2$.

- A) VVV D) FVV
B) VVF E) VVF
C) FVV

08. Sea P un polinomio homogéneo definido por:

$$P(x, y) = ax^c + bx^{c-1}y^a - cx^ay^b - dy^{2c-3}$$

Tal que la suma de sus coeficientes es -8 , entonces el valor de $M = a + b + c + d$, es:

- A) 10 D) 16
B) 12 E) 18
C) 14

09. Indique verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. Si $P(x, y) + Q(x, y)$ es un polinomio homogéneo, entonces $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios homogéneos

II. Si $(a-1)x^5 + ax^3 + (a-b)x^2 + bx + a$ es un polinomio completo, entonces la suma de sus coeficientes es 2.

III. Si el polinomio $P(x, y) = (a^b + 8)x^3 - (a^2 - 4)xy + (ab + 6)y^b$ se anula para todo valor de su variable, entonces $a + b = 5$

- A) VVV D) FVV
B) FVF E) FFF
C) VVF

10. Si P es un polinomio completo y ordenado.

$$P(x) = x^{3a-b} + 2x^{2a} + 3x^{3b-c} + x^{a+b-c} + \dots + x + 1$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El polinomio $P(x)$ tiene 8 términos

II. El polinomio $P(x)$ es de 7mo grado

III. El valor de abc es 6.

- A) FFF D) VVF
B) FFF E) VVV
C) VFF

11. Si $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ son polinomios definidos por:

$$P_0(x) = x^3 + 213x^2 - 67x - 2000$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x-n), \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces el valor del coeficiente de x en el polinomio $P_6(x)$, es:

- A) -7 690 D) -6 970
B) -7 960 E) -9 760
C) -6 790

12. Si P es un polinomio homogéneo definido por:

$$P(x, y) = 2^{-1}(a+b)x^{a^2+n} +$$

$$3^{-1}(a-b)x^{b^2+n}y^n + 12y^{b^2+12}$$

entonces el producto de sus coeficientes, es:

- A) 12 D) 4
B) 6 E) 2
C) 3

13. Si P un polinomio completo y ordenado en forma descendente definido por:

$$P(x) = qx^3 + \sqrt{p+6}x^{2m-8} +$$

$$\sqrt[3]{5n+8}x^{5m+n-19} + \left(\frac{m}{4} + 2\right)x^{p+n-3}$$

tal que la suma de sus coeficientes es $m + n + p$, entonces el valor de $\sqrt[3]{q}$, es:

- A) -1 D) 3
B) 1 E) 4
C) 2

22. Si $x = \frac{\sqrt[4]{3}+1}{\sqrt[4]{3}-1}$, entonces el valor

de $J = \frac{(x^2+2x+1)^4 + (x^2-2x+1)^4}{(x^2+2x+1)^4 - (x^2-2x+1)^4}$, es:

- A) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{10}$
 B) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{3}{8}$
 C) $\frac{6}{7}$

23. Si: $x+y+z=2$
 $x^2+y^2+z^2=2$

Entonces el valor de

$E = x^2(x-2) + y^2(y-2) + z^2(z-2) - 3xyz$,

es:

- A) -1 D) -6
 B) -2 E) 6
 C) -3

24. Si $(a+b+c+d)^2 = 4(a+b)(c+d)$, entonces el valor de

$M = \frac{a-c}{d-b} + \frac{b-c}{d-a}$, es:

- A) 2 D) 1
 B) 4 E) $\frac{1}{2}$
 C) 0

25. Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, entonces el valor de

$E = \frac{(a+b+c)^6 - a^6 - b^6 - c^6}{a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3}$, es:

- A) 1 D) 4
 B) 2 E) 0
 C) 3

26. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que satisface:

$\frac{x^2-yz}{x} + \frac{y^2-xz}{y} + \frac{z^2-xy}{z} = 0$

Entonces el valor de

$M = \frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{x^3+y^3+z^3}$, es:

- A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{7}{3}$
 D) $\frac{8}{3}$ E) 2

27. Si $\sqrt[3]{a^3+3a+6b^2+2c^2} + \sqrt[3]{a^3+3a-6b^2-2c^2} = b$

Entonces el valor de

$C = \sqrt[3]{a^3+3a+6b^2+2c^2} - \sqrt[3]{a^3+3a-6b^2-2c^2}$, es:

- A) 4 D) 32
 B) 8 E) 2ab
 C) 16

28. Si la siguiente división

$$\frac{3x^5+mx^3+nx^2-x+2}{x^2+3}$$

Da como residuo $5x-10$, entonces el valor de $T = m + n$, es:

- A) 11 D) 7
 B) 5 E) 4
 C) 1

29. Del esquema siguiente muestra la división de dos polinomios según la regla del Hórner:

e	-2b	d	c	; b = a + e
b	bd	3d		
c		bf	cf	
d	f	e	c	

Entonces el valor de $T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$, es:

- A) 222 D) 237
 B) 227 E) 242
 C) 232

30. Si la siguiente división: $(x^5 + x^3 + ax^2 + b) \div (x^3 + x^2 + cx + 1)$ es exacta, entonces el valor de $T = abc$, es:

- A) 1 D) 8
B) 2 E) -12
C) -4

31. Si la siguiente división $(3mx^5 + 3nx^4 + (5m^2 + 3p)x^3 + 9mnx^2 + mnp + n^2) \div (mx^2 + nx + p)$ es exacta, entonces el valor de

$$T = \frac{p}{m}(m-16), \text{ es:}$$

- A) 5 D) $\frac{5}{4}$
B) 4 E) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{4}{5}$

32. Si la división $\frac{Ax^4 + Dx^3 + Cx + D}{Dx^3 + E}$

es exacta, entonces una relación entre los coeficientes de la división, es:

- A) $D + E = C + A$ D) $A + D = C$
B) $AC = E$ E) $AC = DE$
C) $AD = EC$

33. Sea $P(x)$ un polinomio que cumple:

$P(x) - P(x-1) = 2x(2x-1)$, entonces la diferencia de los residuos que se obtienen al dividir $P(x)$ entre $(x-1)$ y $(x+1)$ respectivamente, es:

- A) -2 D) 1
B) -1 E) 2
C) 0

34. Si P es un polinomio definido por: $P(x) = ax^4 + bx^3 + c$ tal que si la diferencia de los restos de dividir respectivamente entre:

$x^2 + 1$ y $x^3 + 1$ es $2(x-2)$, entonces el valor $T = a \cdot b$, es:

- A) 1 D) 4
B) 2 E) 6
C) 3

35. Dada la siguiente división,

$$3 + (x-3)^{3n+3} \div x^3 - 26 + 27x - 9x^2$$

$n \in \mathbb{Z}^+$. Hallar el resto

- A) 3 D) 5
B) 2 E) 6
C) 4

36. Si P es un polinomio definido por: $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8$ tal que el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x+3)$ es 6,

Entonces el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x-3)$, es:

- A) 21 D) 16
B) 18 E) 13
C) -22

37. Si P es un polinomio definido por: $P(x) = x^5 + ax^3 + bx + c$ tal que si se divide $P(x)$ entre $(x^3 + 3x)$ el residuo es $-20x + 1$ y si se divide $P(x)$ entre $(x^3 - 3x)$ el residuo es $(40x+1)$, entonces el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x+3)(x-3)$, es:

- A) $174x + 1$ D) $168x + 1$
B) $172x + 1$ E) $166x + 1$
C) $170x + 1$

38. Si al dividir $P(x)$ por $x^4 - 1$ da como resto $R(x) = 2x^2 - 1$, entonces el resto de dividir $[P(x)]^2$ por $x^2 - 1$, es:

- A) $7x$ D) $10x + 1$
B) 1 E) $7x - 1$
C) 9

39. Si P es un polinomio tal que al dividir $P(x)$ entre $(x^2 - 4)(x - 4)$ se obtiene como residuo $x^2 + x + 1$, entonces el residuo que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $x^2 - 2x - 8$, es:
 A) $3x + 9$ D) $x + 6$
 B) $x + 3$ E) $x^2 - 3$
 C) $2x + 3$
40. Si el polinomio $P(x) = 2mx^4 - m^2x^2 - 8x$, es divisible por $x^2 - x - m$, entonces el valor de m , es:
 A) 2 D) 1
 B) $\frac{4}{3}$ E) 3
 C) -2
41. Si P es un polinomio definido por: $P(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$. Tal que $P(x)$ es divisible separadamente entre $(x - a)$, $(x - b)$ y $(x - c)$, entonces el valor de $T = a + b + c$ con $b \neq 0$ es:
 A) 0 D) 2
 B) 1 E) -2
 C) -1
42. Si un polinomio $P(x)$ de cuarto grado cuyo coeficiente del término de mayor grado es 3, es divisible por $(x^2 - 9)$ y por $(x - 1)$. Si al dividir $P(x)$ entre $(x - 2)$ se obtiene como residuo -50, entonces el residuo que se obtiene de la división de $P(x)$ entre $(x + 1)$, es:
 A) 12 D) 16
 B) 14 E) 18
 C) 15
43. Sea P un polinomio (definido en x) tal que $P(x)$ es divisible separadamente por $(x^2 + x - 6)$ y $(x^2 + x - 2)$, entonces el resto que se obtiene de dividir $P(x) \div (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4)$, es:
 A) $x^2 - x$ D) $x - 2$
 B) $x^2 + x$ E) 0
 C) $x^2 - 2$
44. Si un polinomio de grado $2n + 1$ es divisible entre $x^{2n} - 2$ y tiene por término independiente 4. Si el polinomio es disminuido en 420 es divisible por $(x - 2)$ y si el polinomio es disminuido en 18 es divisible por $(x + 1)$. Entonces el grado del polinomio, es:
 A) 1 D) 4
 B) 2 E) 5
 C) 3
45. Si al residuo de dividir $(x^{299} + x + 1) \div (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ se divide entre $-x^2 - 1 - x$, entonces el valor de este último residuo en $x = 5\sqrt{2}$, es:
 A) 125 D) 1
 B) 50 E) 0
 C) $25\sqrt{2}$
46. Dado el siguiente cociente notable $\frac{x^{3m+9} - y^{30}}{x^m - y^{m+2}}$ Entonces el valor de "m", es:
 A) 1 D) 4
 B) 2 E) 5
 C) 3
47. Si el desarrollo del siguiente cociente notable $\frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{x}$ tiene un término de la forma $a(x^2 - 1)^b$, entonces el valor de $T = a + b$, es:
 A) 3 D) 8
 B) 5 E) 11
 C) 7

48. Si el término del desarrollo de:

$$\frac{x^{17.5} - y^{8.75}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{y}}, \text{ entonces el número}$$

de término del cociente notable, es:

- A) 16 D) 35
B) 30 E) 12
C) 15

49. Si en el desarrollo del siguiente

$$\text{cociente notable } \frac{x^n - y^{n+p}}{x^3 y^{n-3} - y^{n+2}} \text{ se}$$

obtiene un término que contiene a x^{12} , entonces el valor de $T = n - p$, es:

- A) 9 D) 12
B) 10 E) 14
C) 11

50. En el desarrollo del siguiente

$$\text{cociente notable } \frac{x^{148a} - y^{296b}}{x^{2a} - y^{4b}} \text{ se}$$

obtiene el término de lugar 60 que es $x^{56} y^{708}$, entonces el grado del término de lugar 21, es:

- A) 400 D) 720
B) 452 E) 128
C) 360

51. En el desarrollo del cociente

$$\text{notable } \frac{(11x+3)^{21} + (11x-3)^{21}}{3x}, \text{ se}$$

obtiene un término de la forma: $\alpha(121x^2 - \beta)^7$, entonces el valor de $T = 6\alpha + \beta + \gamma$, es:

- A) 66 D) 57
B) 63 E) 54
C) 60

52. Dados dos cocientes notables

$$\frac{x^{125} - y^{150}}{x^5 - y^5} \text{ y } \frac{x^{170} - y^{102}}{x^5 - y^3}$$

entonces el término idéntico de los cocientes notables, es:

- A) $x^{76} y^{53}$ D) $x^{73} y^{58}$
B) $x^{75} y^{54}$ E) $x^{36} y^{83}$
C) $x^{12} y^{83}$

53. Si en el desarrollo del cociente

$$\text{notable } \frac{x^{n+3m} - y^{7m}}{x^2 - y^4} \text{ hay 14}$$

términos, entonces el grado absoluto del término que ocupa el lugar $(m-n)$, es:

- A) 8 D) 64
B) 16 E) 72
C) 32

54. Dado el siguiente cociente

$$\text{notable } \frac{x^{3n+2} - y^{5n-1}}{x^2 - y^{n-5}}, \text{ entonces el}$$

grado absoluto del décimo primer término en el cociente notable, es:

- A) 25 D) 30
B) 32 E) 34
C) 28

55. Considere el polinomio

$$P(x) = 8x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1,$$

indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. $P(x)$ es primo en el campo Q
II. $P(x)$ tiene 2 factores primos en Q
III. $P(x)$ carece de raíces racionales.

- A) VFF D) FFF
B) VVV E) FVV
C) FFV

56. Si P es un polinomio factorizable

$$\text{definido por } P(x) = x^{n+2} + x^n + x^3 + x - x^2 - 1; \text{ entonces un factor es:}$$

- A) $x^n + x + 1$ D) $x^n - x - 1$
B) $x^n + x - 1$ E) $x^n + 1$
C) $x^n - x + 1$

57. Si P es un polinomio factorizable definido por:
 $P(x) = x^{10} + 2x^6 + x^2 - 1$
 Entonces el número de factores primos en Q, es:
 A) 2 D) 6
 B) 3 E) 8
 C) 4
58. Si P es un polinomio factorizable definido por:
 $P(x) = x^2 + (b + c + 2d)x + d^2 + (b + c)d + bc$
 Entonces un factor primo, es:
 A) $x + b + d$ D) $x + c$
 B) $x + 2d$ E) $x - 2c$
 C) $x + d + b + c$
59. Si E es un polinomio factorizable definido por:
 $E(x) = x^6 + 4x^4 + 3x^2 - 2x - 1$
 Entonces la suma de coeficientes de un factor, es:
 A) 0 D) 4
 B) 2 E) 5
 C) 3
60. Si P es un polinomio factorizable definido por:
 $P(x; y) = x^{10} - y^8x^2 + x^9y - xy^9 + x^8y^2 - y^{10}$, entonces uno de sus factores primos, es:
 A) $x^2 - xy + y^2$ D) $x^3 - xy + y^3$
 B) $x^3 + xy + y^3$ E) $x^4 - xy + y^4$
 C) $x^2 + xy + y^2$
61. Si P es un polinomio factorizable definido por:
 $P(x, y, z) = x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2y z$, entonces uno de los factores, es:
 A) $x - y + z$ D) $x - y - z + 1$
 B) $x - y + z + 1$ E) $x + y + z$
 C) $x - y - z$
62. Si H es un polinomio factorizable definido por:
 $H(x, y, z, w) = (x + y + z)(x + y + w)(x + z + w)(y + z + w) - xyzw$,
 entonces un factor primo, es:
57. A) $x + 2y + z$ D) $2x + 3y - w$
 B) $x - y - z$ E) $2x + 3y - w$
 C) $x + y + z + w$
63. Si P y Q son dos polinomios factorizables definidos por:
 $P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 9$
 $Q(x) = 10x^3 - 9x^2 + 17x - 6$
 Entonces el coeficiente de mayor valor absoluto del M.C.D. (P, Q), es:
 A) 5 D) 2
 B) 4 E) 1
 C) 3
64. Si el producto de dos polinomios es $x^4 - 18x^2 + 81$ y el cociente de su M.C.M. y M.C.D. es $x^2 - 6x + 9$, entonces el MCD de dichos polinomios, es:
 A) $x + 1$ D) $x + 4$
 B) $x + 2$ E) $x + 5$
 C) $x + 3$
65. Si P, Q y R son tres polinomios factorizables por:
 $P(x; y) = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$
 $Q(x; y) = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$
 $R(x; y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$
 Entonces el M.C.D. (P, Q, R), es:
 A) $x - 2y$ D) $(x + y)^2$
 B) $x^2 + y$ E) $x y$
 C) $x - y$
66. Si P_1 y P_2 son dos polinomios factorizables definidos por:
 $P_1(x) = ax^2 + 2x - b$
 $P_2(x) = ax^2 - 4x + b$
 Tal que a y b son enteros positivos y $M.C.M.(P_1, P_2) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, entonces el valor de $T = b^2 - a$, es:
 A) 18 D) 15
 B) 24 E) 21
 C) 8

67. Si P y Q son dos polinomios factorizables definidos por:

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 14x + 8$$

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 21x + 12$$

Entonces la suma de los coeficientes del M.C.D (P, Q), es:

- A) 4 D) 7
B) 5 E) 8
C) 6

68. Si P y Q son polinomios factorizables definidos por:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$$

Entonces el término independiente del M.C.D.(P, Q), es:

- A) -3 D) 1
B) -6 E) 3
C) -1

69. Si P es un polinomio definido por:

$$P(x) = 4x^6 - 16x^4 + 28x^3 + 16x^2 - 56x + 49$$

tal que la raíz cuadrada de P es exacta, entonces la suma de coeficientes de dicha raíz es:

- A) 12 D) -3
B) 10 E) -2
C) 5

70. Si P es un polinomio definido por:

$$P(x) = x^4 - 5 + 6x^2 + 4x^3 - 12x,$$

tal que al extraer la raíz cuadrada de P, se obtiene un residuo igual a: $ax+b$, entonces el valor de $T = a - b$, es:

- A) -10 D) 7
B) -8 E) 9
C) -5

71. Si $A > 0$ y P es un polinomio definido por:

$$P(x) = 9x^4 - 12x^3 + Ax^2 + (B - 5)x + 25$$

tal que al extraer la raíz cuadrada este es exacto, entonces el valor de $T = A + B$, es:

- A) 8 B) 14 C) 16
D) 19 E) 23

72. Si T es una expresión definida por:

$$T = \sqrt[3]{x+4} + 2\sqrt[3]{8x} - \sqrt[3]{x+3} + 2\sqrt[3]{9x}$$

entonces la expresión T es equivalente a:

- A) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$
B) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ E) $\sqrt{7-3\sqrt{2}}$
C) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

73. Al simplificar la expresión:

$$E = \frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{9+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$$

se obtiene:

- A) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$
B) $\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

74. Si T es una expresión definida por:

$$T = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 + x^2 + 2x}, x > 0$$

entonces la expresión T es equivalente a:

- A) $\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 4}{2}} - \sqrt{x}$
B) $\sqrt{\frac{2x^2 + 4x + 2}{2}} - \sqrt{\frac{x}{2}}$
C) $\sqrt{\frac{2x^2 + x + 2}{2}} - \sqrt{\frac{x}{2}}$
D) $\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{2}} - \sqrt{\frac{x}{2}}$
E) $\frac{1}{2} \left[\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x} \right]$

75. Si E es una expresión definida por:

$$E = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}}$$

Entonces una expresión equivalente, es:

A) $\frac{2+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}$

D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

B) $\frac{2+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$

E) $\frac{13+7\sqrt{3}}{22}$

C) $\frac{7+3\sqrt{3}}{22}$

- A) 36
B) 300
C) 216
- D) 144
E) 243

79. Si p, q, x, z, y, t son proposiciones lógicas tal que cumplen las condiciones:
pΔq es verdadera, $\sim x \rightarrow y$ es verdadera, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $z \rightarrow \sim p \vee \sim q$

II. $p \leftrightarrow \sim q$

III. $(\sim x \wedge \sim y) \rightarrow t$

A) VVV D) FVV

B) FFF E) VFV

C) VVF

76. Si M es una expresión definida por:

$$M = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2}$$

Entonces al racionalizar y simplificar M, el denominador resultante, es:

A) 48

D) 15

B) 28

E) 12

C) 20

80. Si p, q, r, s, t, u y w son proposiciones lógicas tal que:

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es falsa, $q \leftrightarrow (p \rightarrow t)$ es falsa, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, es:

I. $\sim t \wedge (r \rightarrow w)$

II. $q \vee (\sim r \leftrightarrow u)$

III. $t \rightarrow (s \Delta r)$

A) VVV

D) FVV

B) VVF

E) FFF

C) VFV

77. Si T es una expresión definida por:

$$T = \frac{A}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

Entonces al racionalizar T, el denominador resultante, es:

A) 30

D) 6

B) 25

E) 3

C) 8

81. Si la siguiente proposición: $(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \rightarrow t)$, es falsa, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(r \leftrightarrow t) \vee \sim r$

II. $[(r \leftrightarrow p) \wedge (t \vee r)] \vee (\sim t)$

III. $(\sim p \rightarrow r) \vee \sim t$

A) VVV

D) FVV

B) VVF

E) VFV

C) VFV

78. Si M es una expresión definida por:

$$M = \frac{1}{\sqrt[3]{49 - \sqrt[3]{7} - 6}}$$

Entonces al racionalizar y simplificar M, el denominador resultante, es:

82. Dada la siguiente fórmula lógica $S: (r \rightarrow p) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow r)$ indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

I. Si p y q son verdaderas, para que S sea verdadera el valor de verdad de r siempre es F.

II. Si r es falsa y S es falsa, entonces q es F.

III. Si r es verdadera y P es falsa, entonces en S es V.

- A) FVV D) FFV
B) FVF E) FFF
C) VVF

83. Al simplificar la siguiente proposición compuesta:

$[\sim p \rightarrow \sim (p \rightarrow q)] \vee [(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p]$, se obtiene:

- A) p D) F
B) q E) $\sim q$
C) V

84. Al simplificar la siguiente proposición compuesta:

$[p \leftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{ [p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)] \}$, se obtiene:

- A) p D) V
B) q E) F
C) r

85. Al simplificar la siguiente proposición compuesta:

$\sim \{ [(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge \sim (\sim p \rightarrow \sim q)] \vee (p \rightarrow \sim q) \}$ se obtiene:

- A) $p \wedge q$ D) $\sim p \vee q$
B) $p \vee q$ E) $p \vee \sim q$
C) $\sim (p \wedge q)$

86. Si $\#$ es un operador lógico definido por:

$p \# q = (p \vee (r \rightarrow p) \wedge p) \Delta \{q \wedge (p \leftrightarrow \sim p)\}$

Entonces $p \# q$ es equivalente a:

- A) p D) $\sim p$
B) q E) $\sim q$
C) $p \wedge q$

87. Si $*$ es un operador lógico definido mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Entonces al simplificar la proposición: $(p * q) * (q * p)$, se obtiene:

- A) $\sim p \wedge q$ D) $p \wedge \sim q$
B) $p \vee q$ E) $\sim p \wedge \sim q$
C) $p \wedge q$

88. Si $\square$ es un operador lógico definido mediante la siguiente tabla

p	q	$p \square q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Entonces al simplificar la proposición: $[p \square (\sim p \square q)] \square q$, se obtiene:

- A) F D) q
B) V E) $p \wedge q$
C) p

89. Si $*$ es un operador lógico definido mediante la tabla adjunta tal que $(s * t) * (t * s)$ es verdadero

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Entonces la proposición $\sim (s * t)$, es:

- A) Verdadera D) $s \wedge t$
B) Falsa E) t
C) s

SOLUCIONARIO

1º SEMINARIO - TALLER

ALGEBRA

01) P es un polinomio, entonces, "los exponentes de las variables deben ser números enteros no negativos"

(vea el coeficiente: $m \neq 5$)

Luego:

$$2n+m-15 \geq 0 \wedge m-n \geq 0 \wedge 5-n \geq 0$$

$$\wedge 6-m \geq 0$$

donde: $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\nabla 2n+m \geq 15 \wedge m \geq n \wedge n \leq 5 \wedge m \leq 6$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

• DE (1): $m = \textcircled{6}; 5; 4; \dots$

• DE (2): $n = \textcircled{5}; 4; 3; \dots$

de aquí, los únicos valores de m y n que verifican (1) y (2) son:

$$m=6 \text{ y } n=5$$

$$\therefore T = 3(6) - 4(5) = -2$$

$$02) P(x) = (5x-1)^{2n-1} \cdot (2x+5)^n + 2$$

$$+ [(3x+1)(x+5)]^n + (x^2+n)(x-2)$$

Aquí: T.I.(P) = P(0) = (-1)²ⁿ⁻¹ \cdot (5)ⁿ

$$+ [(1)(5)]^n + (n)(-2)$$

$$\nabla -5^{2n-1} \cdot 5^n - 2n = -36 \rightarrow n=18$$

Luego:

$$P(x) = (5x-1)^{35} (2x+5)^{18} + [(3x+1)(x+5)]^{18} + (x^2+18)(x-2)$$

donde: GRADO(P) = 35 + 18 = 53

$$03) P(x,y) = \underbrace{4x^{2+1}y^{1-2}}_{t_1} + \underbrace{13x^{2+2}y^{1-1}}_{t_2} + \underbrace{6x^{2+3}y^{1-2}}_{t_3}$$

Obs:

$$\left. \begin{aligned} GA(t_1) &= 2+1-1 \\ GA(t_2) &= 2+1+1 \\ GA(t_3) &= 2+1+1 \end{aligned} \right\} \rightarrow GA(P) = 2+1+1 \rightarrow 2+1+1=20 \dots (\alpha)$$

Además: $GA(P_x) = 2+3=8$ (dato)

$$\rightarrow 2=5$$

$$GA(x) = 5+1+1=20 \rightarrow b=14$$

$$\therefore T = 2b = (5)(14) = 70$$

$$04) \nabla GA(P+Q) \leq GA(P) + GA(Q)$$

Esta proposición se verifica siempre que "el $GA(P)$, el $GA(Q)$ y el $GA(P+Q)$ estén perfectamente definidos (la proposición no lo dice)

Por ejemplo:

$$\text{Si } P(x) = x^2 + x - 1 \text{ y}$$

$$Q(x) = -x^2 - x + 1$$

$$\nabla P(x) + Q(x) = 0$$

"El grado de 0 no está definido"

Por tanto, no verificaría la desigualdad $\nabla (I) \text{ es } F$

(II) La proposición (II), es similar a la proposición (I)

$\nabla (II) \text{ es } F$

(*) (*) $GA(P^n) = GA(P) \cdot n$; $n \in \mathbb{N}$
 $\hookrightarrow$ (III) es F

(****) EL GRADO DE UN PRODUCTO ES IGUAL A LA SUMA DE LOS GRADOS DE CADA UNO DE LOS FACTORES
 $\hookrightarrow$ (IV) es V

Por tanto: $M = 1 \wedge N = 3$

Donde: $N > M$ $\checkmark$

(*) (*) Supongamos así:

$P(x) = x^5 + x^4 + 1 \rightarrow GA(P) = 5$

$Q(x) = -x^5 + 2 \rightarrow GA(Q) = 5$

Luego:

$P(x) + Q(x) = x^4 + 3 \rightarrow GA(P+Q) = 4$

con esto: (I) es F

(*) (*) Sea: $P(x) = x^6 + x^5 + 1$ y
 $Q(x) = x^6 + x - 2$; vemos que:

$P(x) - Q(x) = x^5 - x + 3$

Donde: $GA(P-Q) = 5$, pero...

$GA(Q) = 6 > 5 \hookrightarrow$ (II) es F

(****) Sea $GA(P) = m > 1$; $GA(Q) = n$
 como $GA(P^3 Q^2) = 13$

$\hookrightarrow 3m + 2n = 13$; $m > 1$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 \end{matrix} \hookrightarrow$ ÚNICA
 POSIBILIDAD

Luego:

$GA(PQ) = m + n = 5 \hookrightarrow$ (III) es F

$\therefore$ FFF $\checkmark$

(*) (*) Supongamos así:

$GA(P) = a$; $GA(Q) = b$; $GA(R) = c$

Dato: $b + c = a + 10 \dots (1)$

Otro: $GA(4\sqrt{PQ}R) = 10$

$\hookrightarrow \frac{2a+b+c}{4} = 10$

$\rightarrow 2a+b+c = 40 \dots (2)$

Además: $GA\left[\frac{(PQ)^3}{R^4}\right] = 34$

$\hookrightarrow 3a+3b-4c = 34 \dots (3)$

Nos piden: $b - a = ?$

$\cdot$ (2) - (1): $2a = 30 - a \rightarrow a = 10$

$\cdot$ En (1): $b + c = 20 \rightarrow c = 20 - b$

$\cdot$ En (3): $30 + 3b - 4(20 - b) = 34$
 $\rightarrow 30 + 3b - 80 + 4b = 34$

$7b = 84 \rightarrow b = 12$

$\therefore b - a = 2$ $\checkmark$

(*) (*) De $P(x) = (1+2x)^n + (1+3x)^n$

Def: $GRADO(P) = n$

$\cdot \Sigma \text{COEF.}(P) = P(1) = 3^n + 4^n$

$\cdot T.I.(P) = P(0) = 1 + 1 = 2$

Dato: $\Sigma \text{COEF.}(P) = T.I.(P) + 23$
 $3^n + 4^n = 25$

De aquí: $n = 2$

con esto:

(*) GRADO(P) = $n = 2 \hookrightarrow$ (I) es V

(*) $\Sigma \text{COEF.} = 25 \hookrightarrow$ (II) es V

(+++) TÉRMINO CUADRÁTICO
DE P $= 4x^2 + 9x^2$

$$= 13x^2$$

$\therefore \underline{VVE}$

$\Rightarrow$ (III) EF

COMPLETO, NECESARIAMENTE:

$$a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

EL POL. SERÁ: $P(x) = x^3 + (1-1)x^2 + 1x + 1$

ONDE:

$$\Sigma \text{coef} = P(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 3$$

$\Rightarrow$ (II) EF

(09) DEL POLINOMIO HOMOGÉNEO:

$$P(x, y) = \underbrace{ax^2}_{t_1} + \underbrace{bx^2}_{t_2} + \underbrace{-cx^2}_{t_3} + \underbrace{-dy^2}_{t_4}$$

$$GA(t_1) = GA(t_2) = GA(t_3) = GA(t_4)$$

$$\Rightarrow C = C - 1 + a = a + b = 2C - 3$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

$$\bullet (1) = (4): C = 2C - 3 \rightarrow C = 3$$

$$\bullet (1) = (3): a + b = 3$$

ADemás:

$$\Sigma \text{coef.}(P) = P(1, 1) = a + b - c - d = -8$$

(dato)

$$\text{Aquí: } 3 - (c + d) = -8 \rightarrow c + d = 11$$

$$\therefore M = 3 + 11 = 14$$

(+++) Si $P(x, y)$ sea nula $\forall$ valor de sus variables, entonces

$P(x, y) = 0$. Por tanto:

$$+a + b = 0 \dots (1)$$

$$+a - 4 = 0 \rightarrow a = 2 \times \begin{matrix} \text{No cumple} \\ 1 \end{matrix}$$

$$a = -2 \checkmark$$

$$+a + b = 0 \dots (2)$$

Como $a = -2$; en (2): $b = 3$

Estos valores satisfacen (1)!

Por tanto: $a + b = 1 \Rightarrow$ (III) EF

$\therefore \underline{FFF}$

$$(09) (+) \text{ Si } P(x, y) = x^3 + x^2 y^3$$

$$\text{y } Q(x, y) = -x^2 + x y^4$$

VEAMOS QUE:

$$P(x, y) + Q(x, y) = x^3 + x y^4$$

POL. HOMOGÉNEO

PERO $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ NO SON POLINOMIOS HOMOGÉNEOS.

$\Rightarrow$ (I) EF

(+++) PARA QUE

$$(a-1)x^2 + 2x^2 + (a-1)x^2 + bxy + a, \text{ sea}$$

10) RECUERDE

Si $P(x)$ es un POL. COMPLETO y ORDENADO, ENTONCES, LA DIFERENCIA DE GRADOS RELATIVOS DE DOS TÉRMINOS CONSECUTIVOS VALE 1.

En nuestro caso, $P(x)$ está ORDENADO DESCENDIENTEMENTE.

$$+(3-1) - 2a = 1 \rightarrow a - 1 = 1 \dots (1)$$

$$+2a - (3b - 0) = 1 \rightarrow 2a - 3b + 0 = 1 \dots (2)$$

$$+(2-0) - (2b - 0) = 1 \rightarrow 2b - 2a = 1 \dots (3)$$

$$\bullet (1)+(3): b=2; \text{EN (I)}: a=3$$

$$\text{EN (2)}: 6a+c=1 \rightarrow c=1$$

$$\Downarrow P(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + x^4 + \dots + x + 1$$

COEF.:

$$+ (I) \text{ ES } V; (II) \text{ ES } V; (III) \text{ ES } V$$

$$\therefore \underline{VVV}$$

$$(11) P_0(x) = x^3 + 213x^2 - 67x - 2000$$

$$P_n(x) = P_n(x=n)$$

$$P_1(x) = P_0(x=1)$$

$$= (1)^3 + 213(1)^2 - 67(1) - 2000$$

$$P_2(x) = P_0(x=2)$$

$$= (2)^3 + 213(2)^2 - 67(2) - 2000$$

$$P_3(x) = P_0(x=3)$$

$$= (3)^3 + 213(3)^2 - 67(3) - 2000$$

$$P_4(x) = P_0(x=4)$$

$$= (4)^3 + 213(4)^2 - 67(4) - 2000$$

$$P_5(x) = P_0(x=5)$$

$$= (5)^3 + 213(5)^2 - 67(5) - 2000$$

$$P_6(x) = P_0(x=6)$$

$$= (6)^3 + 213(6)^2 - 67(6) - 2000$$

DE AQUÍ:

$$\text{TÉRMINO EN } x: 3(2(2)^2 + 213[-2(x)(2)] - 67(x))$$

$$\Downarrow \text{COEF. DE } x = 3(2)^2 - 213(4) - 67 = -169$$

(12) Si P es POL. HOMOGÉNEO, ELGRADO EN CADA UNO DE SUS TÉRMINOS ES EL MISMO.

$$\Downarrow \begin{matrix} 2^2 + n = 1^2 + 2n = 1^2 + 12 \\ (1) \quad (2) \quad (3) \end{matrix}$$

$$\bullet (2) = (3): n = 6$$

$$\bullet (1) = (3): 2^2 + 6 = 1^2 + 12 \rightarrow 2^2 - 1^2 = 6$$

NOTA: PIDER:

$$\text{PROD. DE COEF.} = \frac{1}{2}(2+6) \cdot \frac{1}{2}(6-6) \cdot 12 = 2(2^2 - 1^2) = 2(6) = 12$$

(13) POR SER COMPLETO Y ORDENADO EN FORMA DESCENDENTE VEMOS QUE:

$$+ 2m - 6 = 2 \rightarrow m = 4$$

$$+ 5m + n - 19 = 1 \rightarrow n = 0$$

$$+ p + n - 3 = 0 \rightarrow p = 3$$

$$\text{ADEMÁS: } \Sigma \text{COEF.} = 9 + 3 + 2 + 3$$

$$\text{POR LO TANTO: } 9 + 8 = \underbrace{m + n + p}_7$$

$$n + 9 = -1 \therefore 3\sqrt[n]{-1} = -1$$

(14) POR SER HOMOGÉNEO, ENTONCES $SA(\text{término}) = SA(\text{término})$

$$2^2 + 2a - 2 = 2^2 + 2 + 2$$

$$\text{DE AQUÍ: } a = 4$$

$$\Downarrow P(x, y) = 5x^7y^{15} + 17x^{18}y^4$$

LUEGO, EL POLINOMIO P SERÁ HOMOGÉNEO Y COMPLETO RESPECTO

A x e y , de $SA=22$, CUANDO
SEA DE LA FORMA:

$$P(x,y) = \underbrace{Ax^{22} + Bx^{21}y + \dots + Tx^{18}y^4}_{4 \text{ TÉRMINOS}}$$

$$+ \underbrace{Ex^{17}y^5 + \dots + 5x^7y^{15} + \dots + My^{22}}_{10 \text{ TÉRMINOS}}$$

$$\therefore \# \text{ DE TÉRMINOS FALTANTES: } \underline{21}$$

(15) DE ACUERDO A LO PLANTEADO,
SUPONEMOS AL POL. $P(x,y)$, ASÍ:

$$P(x,y) = A + Bxy + Cx^2y^2 + Dx^3y^3 + \dots + Mx^ny^n$$

DE AQUÍ:

$$+ SA(t_1) = 2(0) = 0$$

$$+ SA(t_2) = 2(1) = 2$$

$$+ SA(t_3) = 2(2) = 4$$

$$+ SA(t_4) = 2(3) = 6$$

$$\vdots$$

$$+ SA(t_{21}) = 2(20) = \underline{40}$$

(16) RECUERDE

$$(K)^{2n} = (-K)^{2n}; 2n \text{ ES PAR}$$

APLICANDO EN P y Q (BILAS SE
GUINDOS PARÉNTESIS)

$$\left. \begin{aligned} P(x,y,z) &= (x-y+z)^4 - (x+y-z)^4 \\ Q(x,y,z) &= (x+y-z)^4 - (x-y+z)^4 \end{aligned} \right\} \oplus$$

$$\text{SUMANDO: } P(x,y,z) + Q(x,y,z) = 0$$

$$(17) \cdot P(x) = ax^2 + px - r$$

$$\cdot Q(x) = bx^2 - qx - t$$

POR DATO:

$$2P(x) + 3Q(x) < > 3P(x) - 2Q(x)$$

$$0 \text{ TAMBIÉN: } 5Q(x) < > P(x)$$

REEMPLAZANDO:

$$5bx^2 - 5qx - 5t < > ax^2 + px - r$$

DE AQUÍ:

$$5b = 0; -5q = p; -5t = r$$

EN LO PEDIDO:

$$F = \frac{4b}{6a} + \frac{-4q}{-6p} + \frac{4t}{6r}$$

$$F = 3\left(\frac{4}{6}\right) = \underline{\underline{2}}$$

(18) Si $H(x) = 0$ ∇ DEBE CUMPLIR:

$$+ a^2 - 2ab + b^2 = 0 \rightarrow a^2 + b^2 = 2ab$$

$$+ b^2 - 2bc + c^2 = 0 \rightarrow b^2 + c^2 = 2bc$$

$$+ a^2 - 5ac + c^2 = 0 \rightarrow a^2 + c^2 = 5ac$$

$$+ 2abc - 2 = 0 \rightarrow 2abc = 2$$

TRANSFORMAMOS LO PEDIDO:

$$M = a^2(b^2 + c^2 + 2bc)^2 + b^2(a^2 + c^2 + 2ac)^2 + c^2(a^2 + b^2 + 2ab)^2$$

REEMPLAZANDO AQUÍ:

$$M = a^2(5ac)^2 + b^2(7ac)^2 + c^2(3ab)^2$$

$$= (5abc)^2 + (7abc)^2 + (3abc)^2$$

$$\therefore M = (5 \times 2)^2 + (7 \times 2)^2 + (3 \times 2)^2$$

$$\therefore M = \underline{\underline{332}}$$

19) DATO: $c > b > a$, ADEMÁS:

$$\begin{aligned} M(x) &= ax^b + bx^c + abc \\ N(x) &= (b+c)x^2 + cx^b + bx^c \end{aligned} \quad \oplus$$

SUMAMOS ORDENANDO AL POLINOMIO EN FORMA DECRECIENTE:

$$P(x) = (2+b)x^c + (b+c)x^b + (b+c)x^2 + abc$$

COMO POR DATO ES COMPLETO,

$$\Rightarrow a=1; b=2 \text{ y } c=3$$

$$\text{OJEO QUE: } P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

$$Q(x) = x^2 + 2x + 3x^3$$

$$S(x) = -6x^3 - 5x^2 + 2$$

$$\therefore P(x) + Q(x) + S(x) = \underline{x + 8/x}$$

20) DATOS: $p+q+r=2 \dots (1)$

$$pq+pr+qr=0 \dots (2)$$

$$\cdot (1)^2: p^2+q^2+r^2+2pq+2pr+2qr=4$$

$$\Rightarrow p^2+q^2+r^2+2(pq+pr+qr)=4$$

VALE 0

$$\therefore p^2+q^2+r^2 = \underline{4/x}$$

21) DE LA CONDICIÓN, ESCRIBIMOS:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 2+2+2$$

$= m \quad = m \quad = m$

TRANSPONIDIENDO Y AGRUPANDO:

$$\left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} - 2 + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} - 2 + \frac{b}{c}\right) = 0$$

CADA PARENTESIS SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right)^2 = 0$$

OJS: PARA QUE LA SUMA DE CUADRADOS VALGA 0, LA ÚNICA POSIBILIDAD ES QUE CADA SUMANDO DEBE VALER 0.

$$\Rightarrow \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 0 \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\rightarrow b^2 = a^2 \rightarrow a=b$$

EN FORMA SIMILAR:

$$a=c \wedge b=c$$

$$\text{CONCLUSIÓN: } \boxed{a=b=c} = K$$

REEMPLAZANDO EN LO PEDIDO:

$$M = \frac{(3K)^3}{3K^3} = \frac{27K^3}{3K^3} \therefore M = \underline{9/x}$$

22) "J" SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ:

$$J = \frac{[(x+1)^2]^4 + [(x-1)^2]^4}{[(x+1)^2]^4 - [(x-1)^2]^4}$$

$$J = \frac{(x+1)^8 + (x-1)^8}{(x+1)^8 - (x-1)^8}$$

$$\text{DEL DATO: } \frac{x}{1} = \frac{4\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}-1}$$

POR PROPIEDAD DE PROPORCIONES:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$\cdot \text{ELEVADO A LA 8: } \frac{(x+1)^8}{(x-1)^8} = \frac{2^8}{1}$$

NUEVAMENTE, PROPIEDAD DE PRO-

$$\frac{(x+1)^8 + (x-1)^8}{\sqrt{(x+1)^8 - (x-1)^8}} = \frac{0+1}{0-1}$$

ESTO ES J $\therefore J = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

DE AQUÍ: $a-c=d-b$

TAMBIÉN: $b-c=d-a$

EN M: $M = \frac{a-c}{a-c} + \frac{b-c}{b-c} \therefore M = 2$

(23) EFECTUANDO EN E:

$$E = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{2} - 3xyz$$

$$\Rightarrow E = (x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz) - 4$$

SABEMOS QUE:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \quad \dots (1)$$

DE LOS DATOS: $x+y+z = 2 \dots (1)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \dots (2)$$

HEMOS $xy + xz + yz$

$$\cdot (1)^2: \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + 2(xy + xz + yz) = 4$$

DE AQUÍ: $xy + xz + yz = 1$

REEMPLAZO EN (1):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = (2)(2-1) = 2$$

EN E: $E = 2 - 4 = -2$

(24) EN EL DATO, HEMOS LOS CAMBIOS: $a+b=x$; $c+d=y$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 4xy$$

$$\rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \rightarrow (x-y)^2 = 0$$

DE AQUÍ: $x=y$

REEMPLAZANDO: $a+b=c+d$

(25) DE $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

$$\hookrightarrow (b+c)(a+b+c) - abc = abc$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 0$$

CONOCIDO

$$\hookrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

SI ASUMIMOS: $a+b=0 \rightarrow a=-b$

EN E: $E = \frac{a-b-b-a}{-b+b-a-a} = \frac{-2a}{-b} = \frac{2}{b}$

$\therefore E = 2$

NOTA: SI ASUMIERA QUE $b+c=0$

Ó $c+a=0$, SE OBTIENE LO MISMO (VERIFIQUE).

(26) DE $\frac{x^2 + yz}{x} + \frac{y^2 + xz}{y} + \frac{z^2 + xy}{z} = 0$

$$x^2 + yz - (yz)^2 + y^2 + xz - (xz)^2 + z^2 + xy - (xy)^2 = 0$$

PARA VERLO MEJOR, HEMOS LOS CAMBIOS: $xy=a$; $yz=b$; $xz=c$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + ab - c^2 + bc - a^2 = 0$$

$$\hookrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

CONOCIDO

$$\hookrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

$$\hookrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

Obj: PARA QUE LA SUMA DE CUADRADOS VALGA 0, LA ÚNICA POSIBILIDAD ES QUE CADA SUMANDO DEBE VALER 0.

$$\Rightarrow \underbrace{a-b=0}_{a=b}; \underbrace{b-c=0}_{b=c}; \underbrace{c-a=0}_{c=a}$$

REPOSICIONANDO:

$$\begin{aligned} xy &= yz; yz = xz; xy = xz \\ \Rightarrow y &= z; z = x; y = x \end{aligned}$$

CONCLUSIÓN:

$$\underline{x=y=z=K}$$

$$\begin{aligned} \text{SUM: } M &= \frac{(2K)(2K)(2K)}{3K^3} = \frac{8K^3}{3K^3} \\ \therefore M &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(27)

RECUERDE

$$a^{2n} + b^{2m} + c^{2p} + \dots + z^{2k} = 0$$

ONDE $\{a; b; c; \dots; z\} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a=b=c=\dots=z=0$$

$$(28) \frac{3x^5 + mx^3 + nx^2}{x^2 + 3}; R(x) = 5x - 10$$

DIVIDAMOS POR HORNER (COMPLETESE AL DIVIDENDO Y DIVISOR)

1	3	0	m	n	-1	2
0		0	-9			
-3			0	0	(27-3m)	
				0	0	-3n
	3	0	(m-9)	n	(26-3m)	(2-3n)

$R(x)$

$$\Rightarrow R(x) = (26-3m)x + (2-3n) = 5x - 10$$

$$\text{Obj: } * 26-3m = 5 \rightarrow m=7$$

$$* 2-3n = -10 \rightarrow n=4$$

$$\therefore T = m+n = \underline{11}$$

$$(29) \begin{array}{c|cc|cc} a & e & -2b & d & c \\ b & & bd & 3d & \\ c & & & bf & cf \\ \hline & d & f & e & c \end{array}$$

DATO: $b=a+e$

DEL SISTEMA:

$$* \frac{e}{3} = d \rightarrow e = 3d \dots (1)$$

$$+ \cancel{2}c = 3\cancel{2} \rightarrow c = \underline{3}$$

$$+ \frac{-2b + bd}{2} = f \dots (2)$$

$$+ 4d + bf = 2 \dots (3)$$

$$+ \cancel{2}c + cf = \cancel{2} \rightarrow f = \underline{0}$$

$$\text{En (2): } -2b + bd = 0 \rightarrow \cancel{2}b = 2\cancel{b} \rightarrow d = \underline{2}$$

$$\text{En (3): } 4d = 2 \rightarrow d = \underline{8}$$

$$\text{En (4): } 8 = 2 \cdot 2 \rightarrow 2 = \underline{4}$$

$$\text{En (5): } b = \underline{12}$$

$$\therefore T = 16 + 144 + 9 + 4 + 64 + 0 = \underline{237}$$

30) DIVIDIMOS POR HORNER (COMPLETARE EL DIVIDENDO):

1	1	0	1	2	0	b
-1	-1	-c	-1			
-c		1	c	1		
-1			c-2	(c-2)c	c-2	
	1	-1	(2-c)	0	0	0

DIV. EXACTA

$$+ 2 + 2c - 3 = 0 \dots (1)$$

$$+ c^2 - 2c + 1 = 0 \rightarrow (c-1)^2 = 0 \rightarrow c = \underline{1}$$

$$\text{En (1): } 2 + 2 - 3 = 0 \rightarrow 2 = \underline{1}$$

$$+ b + c - 2 = 0 \rightarrow b = \underline{1}$$

$$\therefore T = (1)(1)(1) = \underline{1}$$

31) DIVIDIMOS POR HORNER:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 m & 3m & 3n & (5n^2+3p) & 9mn & mnp & n^2 \\
 -n & & -3n & -3p & & & \\
 -p & & & & -5mn & -5mp & \\
 & & & & & -4n^2 & -4np \\
 \hline
 & 3 & 0 & 5m & 4n & 0 & 0
 \end{array}$$

DN. EXAC.

Obs: $+n^2 - 4np = 0 \rightarrow n^2 = 4np$
 $\rightarrow n = 4p$

$+mnp - 5mp - 4n^2 = 0$

REEMPLAZAMOS LA n POR $4p$:

$m(4p) - 5mp - 4(16p^2) = 0$

$4mp - 64p^2 = 5m$

$4p(m - 16) = 5m$

DE DONDE: $\frac{p(m-16)}{m} = \frac{5}{4}$

32) POR HORNER (COMPLETASE EL DIVIDENDO)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 D & A & D & 0 & C & D \\
 0 & & 0 & 0 & -\frac{AE}{D} & \\
 0 & & & 0 & 0 & -E \\
 -E & & & & & \\
 \hline
 & \frac{A}{D} & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

DIV. EXACTA

Obs: $D - E = 0 \rightarrow D = E$

$C - \frac{AE}{D} = 0 \rightarrow A = C$

MULTIPLICANDO: $AD = EC$

33) $P(x) - P(x-1) = 2x(2x-1) \dots (I)$

EL RESTO DE DIVIDIR $P(x) \div (x-1)$,

ES: $R = P(1)$

EL RESTO DE DIVIDIR

$P(x) \div (x+1)$ ES: $R = P(-1)$

LO QUE NOS PIDE ES:

$P(1) - P(-1) = ?$

ES (I):

$+x = 1 \rightarrow P(1) - P(0) = 2$

$+x = 0 \rightarrow P(0) - P(-1) = 0$

SUMANDO: $P(1) - P(-1) = 2$

34) DATO: $P(x) = ax^4 + bx^3 + c$

HALLEAMOS EL RESTO DE $P(x) \div (x^2+1)$

POR T.R.: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$

DE P: $P(x) = a(x^2)^2 + b(x^2)x + c$

$R(x) = a(-1)^2 + b(-1)x + c$

$R_1(x) = -bx + (a+c)$

AHORA, EL RESTO DE $P(x) \div (x^3+1)$

POR T.R.: $x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1$

DE P: $P(x) = a(x^3)x + b(x^3) + c$

$R_2(x) = a(-1)x + b(-1) + c$

$R_2(x) = -ax + (c-b)$

POR DATO: $R_1(x) - R_2(x) = 2(x-2)$

$\Rightarrow (-b+a)x + (a+b) = 2x-4$

Obs: $+a-b = 2$

$+a+b = 4$

DE DONDE: $a = 3; b = 1$

$\therefore T = (3)(1) = 3$

(35)

$$D(x) = 3 + (x-3)^3 \quad n+3$$

$$d(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$$

$$R(x) = ?$$

$$\text{Por T.R.: } x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 1 = 0$$

$$(x-3)^3 + 1 = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } (x-3)^3 = -1$$

DE DIVIDIENDO:

$$D = 3 + [(x-3)^3] \quad 3^{n+2}$$

$$\nabla R = 3 + (-1)^{3^{n+2}} \rightarrow \# \text{ IMPAR}$$

$$\rightarrow R = 3 + (-1) \therefore R = 2$$

$$(36) \cdot P(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8 \quad (1)$$

$$+ P(x) \div (x+3) \rightarrow R = P(-3) = 6$$

EN (1):

$$R = P(-3) = -243a - 27b - 3c - 8 = 6$$

$$\text{ASÍ: } 243a + 27b + 3c = -14$$

$$+ P(x) \div (x-3) \rightarrow R = P(3) = ?$$

EN (1):

$$R = P(3) = 243a + 27b + 3c - 8$$

$$\therefore \text{RESTO} = -14 - 8 = -22$$

$$(37) \cdot P(x) = x^5 + 2x^3 + 6x + c$$

$$(41) P(x) \div (x^2 + 3x) \rightarrow R(x) = -20x + 1$$

Por HORNER:

1	1	0	2	0	b	c
0		0	-3	0		
-3			0	0	0	
0				0	(9-3)	0
	1	0	(2-3)	0	-20	1

RESTO

OBS:

$$+ c = 1; b - 3(2) + 9 = -20$$

$$\rightarrow 3 - b = 29 \dots (1)$$

$$(44) P(x) \div (x^2 + 3x) \rightarrow R(x) = 40x + 1$$

Por HORNER:

1	1	0	2	0	b	c
0		0	3	0		
3			0	0	0	
0				0	(3+9)	0
	1	0	(2+3)	0	40	1

RESTO

OBS:

$$+ b + 3(2) + 9 = 40 \rightarrow b + 3(2) = 31 \dots (2)$$

$$\text{DE (1) y (2): } a = 10 \wedge b = 1$$

$$\text{LUEGO: } P(x) = x^5 + 10x^3 + x + 1$$

$$\text{NO PIDE EL RESTO DE } P(x) \div (x^2 + 3x)$$

$$\text{Por T.R.: } x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9$$

$$\text{DE P: } P(x) = (x^2)^2 + 10(x^2)x + x + 1$$

$$\nabla R(x) = 9^2x + 10(9)x + x + 1$$

$$\therefore R(x) = 172x + 1$$

$$(38) \cdot P(x) \div (x^2 - 1) \rightarrow R(x) = 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (2x^2 - 1)$$

ELEVANDO AL CUADADO:

$$[P(x)]^2 = [(x^2-1)Q(x) + (2x^2-1)]^2 \dots (I)$$

NOSE PIDE EL RESTO DE $[P(x)]^2 \div (x^2-1)$

Por I.R.: $x^2-1=0 \rightarrow x^2=1$

En (I):

$$R = \left[\frac{(x^2-1)^2}{0} + (2(1)-1)^2 \right] \therefore R = 1$$

(39) * $\frac{P(x)}{(x-4)(x-4)} \rightarrow R(x) = x^2 + x + 1$

EL DIVISOR TAMBIÉN SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ: $d(x) = (x-2)(x+2)(x-4)$

O TAMBIÉN: $d(x) = (x-2)(x^2-2x-8)$

ASÍ, SE CUMPLE, POR IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$P(x) = (x-2)(x^2-2x-8)Q(x) + (x^2+x+1) \dots (I)$$

NOSE PIDE EL RESTO DE DIVIDIR $P(x) \div (x^2-2x-8)$

Por I.R.: $x^2-2x-8=0 \rightarrow x^2=2x+8$

En (I), ES DECIR, EN (I):

$$R(x) = (x-2)(2x+8-2x-8)Q(x) + (2x+8+x+1) \therefore R(x) = 3x+9$$

(40) EFECTUAMOS LA DIVISIÓN POR HORNER (COMPLETASE EL DIVIDENDO).

1	2m	0	-m ²	-8	0
1		2m	2m ²		
m			2m	2m ²	
				m ² 2m	m(m ² 2m)
	2m	2m	(m ² 2m)	0	0

DIVISIBLES

OBSERVO:

$$* 3m^2 + 2m - 8 = 0 \dots (1)$$

$$* m(m^2 + 2m) = 0 \rightarrow m^2(m+2) = 0$$

DE AQUÍ: $m^2 = 0 \vee m+2 = 0$
 $x \qquad m = -2$

OJO: $m = -2$, VERIFICA (1).

(41) $P(x) = x^3 - 2x^2 + bx + c$

SI $P(x)$ ES DIVISIBLE SEPARADAMENTE ENTRE $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$

NO SERÁ POR SU PRODUCTO
 OSEA QUE:

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x)$$

NECESARIAMENTE VALE:

LUEGO, EFECTUANDO:

$$x^3 - 2x^2 + bx + c = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$$

IDENTIFICANDO COEFICIENTES:

$$* -2 = a+b+c \rightarrow b+c = 0 \dots (a)$$

$$* b = ab+bc+ac$$

$$b = a(b+c) + bc \rightarrow b = bc$$

Obs: $c = 1$; EN (a): $b = -1$

$$* a = -ab \rightarrow ab = -1 \rightarrow a(-1) = -1 \rightarrow a = 1 \therefore a+b+c = 1$$

42) DATOS:

* $P(x)$ ES DE 4º GRADO, DONDE EL COEFICIENTE PRINCIPAL VALE 3

* $P(x)$ ES DIVISIBLE POR $(x^2 - 9)$

* $P(x)$ ES DIVISIBLE POR $(x - 1)$

* $P(x) \div (x - 2) \rightarrow R = P(2) = -50$

* $P(x) \div (x + 1) \rightarrow R = P(-1) = ?$

OBJ: $P(x)$ SERÁ DIVISIBLE POR EL PRODUCTO DE $(x^2 - 9)(x - 1)$

$$\nabla P(x) \equiv \underbrace{(x^2 - 9)}_{4^{\text{to}} \text{ G.}} \underbrace{(x - 1)}_{3^{\text{ro}} \text{ G.}} \underbrace{Q(x)}_{1^{\text{ro}} \text{ G.}}$$

DE AQUÍ: $Q(x) = ax + b$

DONDE, ADemás: $a = 3$

$$\hookrightarrow P(x) \equiv (x^2 - 9)(x - 1)(3x + b)$$

$$\text{AQUÍ: } P(2) = (-5)(1)(6 + b) = -50$$

DESPEJANDO: $b = 4$

$$\text{OSEA Q' : } P(x) = (x^2 - 9)(x - 1)(3x + 4)$$

$$\text{AQUÍ: } P(-1) = (-8)(-2)(1)$$

$$\therefore \text{RESTO} = P(-1) = \underline{16} \quad \text{X}$$

43) * $P(x)$ ES DIVISIBLE POR $(x^2 + x - 6)$

* $P(x)$ ES DIVISIBLE POR $(x^2 + x - 2)$

$\nabla P(x)$ ES DIVISIBLE POR EL PRODUCTO DE $(x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2)$

$$\text{OBJ: } (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2) \equiv$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \times & 3 & x & \times & -1 \\ x & \times & -2 & x & \times & 2 \end{array}$$

$$\equiv (x + 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2)$$

$$\equiv (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4)$$

OSEA QUE: $P(x)$ ES DIVISIBLE POR

EL PRODUCTO DE $(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4)$

$\therefore$ EL RESIDUO DE DICHA DIVISIÓN ES 0 X

44) DATOS:

* $P(x)$ ES DE GRADO $2n + 1$

* $P(x)$ ES DIVISIBLE POR $(x^{2n} - 2)$

* T.I.(P) = $P(0) = 4$

* $[P(x) - 420]$ ES DIVISIBLE POR $(x - 2)$

ESTO ES EQUIVALENTE A DECIR:

$$P(x) \div (x - 2) \sim R = P(2) = 420$$

* $[P(x) - 18]$ ES DIVISIBLE POR $(x + 1)$

$$\nabla P(x) \div (x + 1) \sim R = P(-1) = 18$$

LOS PIDEN: $2n + 1 = ?$

$$\text{OBJ: } P(x) \equiv \underbrace{(x^{2n} - 2)}_{\text{GRADO } 2n+1} \underbrace{Q(x)}_{\text{GRADO } 1^{\text{ro}} \text{ GRADO}}$$

$$\nabla Q(x) = ax + b$$

$$\hookrightarrow P(x) \equiv (x^{2n} - 2)(ax + b)$$

* AQUÍ:

$$\bullet P(0) = (-2)(b) = 4 \rightarrow b = -2$$

$$\bullet P(-1) = (-1)(-2 - 2) = 18 \rightarrow a = 16$$

$$\nabla P(x) = (x^{2n} - 2)(16x - 2)$$

$$\text{AQUÍ: } P(2) = (2^{2n} - 2)(30) = 420$$

$$\rightarrow 2^{2n} - 2 = 14 \rightarrow 2^{2n} = 16$$

OBJ: BASES IGUALES $\Rightarrow 2n = 4$

$$\therefore 2n + 1 = \underline{5} \quad \text{X}$$

45) HALLAMOS EL RESTO "R" DE

$$\frac{x^{299} + x + 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$$

PARA ESTO MULTIPLICAMOS AL DIVIDENDO Y AL DIVISOR POR $(x-1)$:

$$\frac{x^{299} + x + 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{x-1}{x-1}$$

EFFECTUANDO, SE TIENE:

$$\frac{x^{300} + x^2 + x - x^{299} - x - 1}{x^6 - 1} \rightarrow D$$

CALCULAMOS EL RESTO R' DE ESTA NUEVA DIVISIÓN.

Por T.R.: $x^6 - 1 = 0 \rightarrow x^6 = 1$

EN EL DIVIDENDO BUSQUEMOS x^6

$(D = x^6)^{50} + x^2 + x - (x^6)^{49} x^5 - x - 1$

$\Delta R' = x + x^2 + x - x^5 - x - 1$

$\rightarrow R' = -x^5 + x^2 = -x^2(x^3 - 1)$

$\rightarrow R' = -x^2(x-1)(x^2+x+1)$

Obs: R' SIRVE PARA CALCULAR EL R BUSCADO, DONDE:

$R = \frac{R'}{x-1} \rightarrow R = x^2(-x^2-x-1)$

AHORA, SI $R = x^2(-x^2-x-1)$ LO DIVIDIMOS ENTRE $(-x^2-x-1)$, SE OBSERVA QUE LA DIVISIÓN ES EXACTA.

$\therefore$ RESIDUO ES: 0

SE CUMPLE: $\frac{3m+9}{m} = \frac{30}{m+2} = \#Z^+$
 $(m+3)(m+2) = 10m$
 $\Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$
 $(m-2)(m-3) = 0$
 DE AQUÍ: $m=2 \vee m=3$
 (NO VERIFICA)

47) ESCRIBAMOS EN LA FORMA DE DIVISIÓN NOTABLE:

$$\frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{x} = 2 \frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{2x}$$

$$= 2 \frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{(x+1) + (x-1)}$$

AHORA, SUPONGAMOS QUE EL TÉRMINO DE LA FORMA $2(x^2-1)^b$ OCUPA LUGAR K,

$\Delta K = 2(-1)^{K-1} (x+1)^{11-K} \cdot (x-1)^{K-1}$
 $= 2(x^2-1)^b$

OBSÉRVESE, AQUÍ SE DEBE CUMPLIR:

$11-K = K-1 \rightarrow K=6$

REEMPLAZANDO TENEMOS:

$-2(x^2-1)^5 = 2(x^2-1)^b$

Obs: $2 = -2 \wedge b=5 \therefore T=3$

46) Si $\frac{3m+9}{x^m} - y^{30}$ GENERA

COCIENTE NOTABLE, ENTONCES,

48) DE $\frac{x^{175} - y^{875}}{x^{1/2} - y^{1/4}}$

#TÉR. DEL $\frac{175}{1/2} - \frac{875}{1/4} = \frac{35}{1}$

49) LA DIVISIÓN DADA SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ:

$$\frac{1}{y^{13}} \left[\frac{x^n - y^{n+p}}{x^3 - y^5} \right]$$

PARA QUE EL "CORCHETE" GENERE C.N., SE DEBE CUMPLIR:

$$\frac{n}{3} = \frac{n+p}{5} = \# \text{ TÉRM. DEL C.N.}$$

$$\text{DE AQUÍ: } 5n = 3n + 3p \rightarrow 2n = 3p \quad \dots (1)$$

SUPONEMOS QUE EL TÉRMINO EN x^{12} OCUPA LUGAR K. $\frac{n}{3} = K$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow t_K &= \frac{1}{y^{n-3}} \cdot (x^3)^{3K} \cdot (y^5)^{K-1} \\ &= x^{n-3K} \cdot y^{3 \cdot n - 5K-5} \end{aligned}$$

$$= x^{n-3K} y^{5K-n-2} \equiv x^{12} y^0$$

$$\text{DE AQUÍ: } n-3K=12 \quad \dots (2)$$

$$5K-n-2=0 \rightarrow 5K-n=2 \quad \dots (3)$$

$$\cdot (2)+(3): 2K=14 \rightarrow K=7$$

$$\cdot \text{EN (2): } n=33; \text{ EN (1): } p=22$$

$$\therefore T = 33 - 22 = 11$$

$$50) \text{ DE } \frac{x^{148a} - y^{296b}}{x^{2a} - y^{4b}}$$

$$\hookrightarrow \# \text{ TÉRM. DEL C.N.} = \frac{148a}{2a} - \frac{296b}{4a} = 74$$

$$\text{LUGAR: } t_{60} = (x^{2a})^{74-60} \cdot (y^{4b})^{60-1}$$

$$\rightarrow t_{60} = x^{28a} y^{236b} \equiv x^{56} y^{708}$$

$$\text{OJ: } a=2 \wedge b=3$$

$$\text{AHORA: } t_{21} = (x^4)^{74-21} \cdot (y^{12})^{21-1}$$

$$n = t_{21} = x^{210} y^{240}$$

$$\therefore SA(t_{21}) = 452$$

51) SIMILAR A LA RESOLUCIÓN 47 (REVISE)

$$\rightarrow \frac{(11x+3)^{21} + (11x-3)^{21}}{3x}$$

$$= \frac{22}{3} \left[\frac{(11x+3)^{21} + (11x-3)^{21}}{(11x+3) + (11x-3)} \right]$$

ASUMIMOS QUE EL TÉRMINO PLANEADO OCUPA LUGAR K.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow t_K &= \frac{22}{3} (-1)^{K-1} (11x+3)^{21-K} \cdot (11x-3)^{K-1} \\ &\equiv \alpha (12(x^2 - 9))^K \end{aligned}$$

AQUÍ, NECESARIAMENTE SE DEBE CUMPLIR:

$$21-K = K-1 \rightarrow K=11$$

$$\hookrightarrow t_{11} = \frac{22}{3} (11x+3)^{10} (11x-3)^{10}$$

$$\rightarrow \frac{22}{3} (12(x^2-9))^{10} \equiv \alpha (12(x^2-9))^K$$

$$\text{OJ: } \alpha = \frac{22}{3}; \beta = 9; \gamma = 10$$

$$\therefore T = 44 + 9 + 10 = 63$$

$$52) \frac{x^{125} - y^{100}}{x^5 - y^6}; \frac{x^{170} - y^{102}}{x^5 - y^3}$$

$$\# \text{ TÉRM. DEL C.N.} = 25$$

$$\# \text{ TÉRM. DEL C.N.} = 34$$

SUPONGAMOS QUE LOS TÉRMINOS
IDÉNTICOS OCUPAN LUGAR m y
 n RESPECTIVAMENTE.

$$\begin{aligned} * t_m &= (x^5)^{25-m} (y^6)^{m-1} \\ &= x^{125-5m} y^{6m-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * t_n &= (x^5)^{34-n} (y^3)^{n-1} \\ &= x^{170-5n} y^{3n-3} \end{aligned}$$

POR SER TÉRMINOS IDÉNTICOS:

$$\begin{aligned} * 125-5m &= 170-5n \\ \leadsto n-m &= 9 \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * 6m-6 &= 3n-3 \\ \leadsto 2m-n &= 1 \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{DE (1) y (2): } m=10$$

$$\therefore \text{TÉRMINO IDÉNTICO, ES: } x^{75} y^{54}$$

$$\textcircled{53} \text{ DE } \frac{x^{n+3m}-y^{7m}}{x^2-y^4}$$

$$\# \text{TÉRMINOS} = \frac{n+3m}{2} = \frac{7m}{4} = 14 \text{ (DADO)}$$

$$\text{DE AQUÍ: } m=8 \wedge n=4$$

$$\text{OBS: } m-n=4$$

LUEGO, EL TÉRMINO BUSCADO ES:

$$t_4 = (x^2)^{14-4} (y^4)^{4-1}$$

$$\leadsto t_4 = x^{20} y^{12} \therefore \text{GA}(t_4) = 32$$

$$\textcircled{54} \text{ DE } \frac{x^{3n+2}-y^{5n-1}}{x^2-y^{n-5}}$$

$$\# \text{TÉRMINOS} = \frac{3n+2}{2} = \frac{5n-1}{n-5} \dots (\alpha)$$

$$\leadsto 3n^2-13n-10=50n-2$$

$$3n^2-23n-8=0$$

$$\begin{array}{ccc} 3n & & 1 \\ & \nearrow & \searrow \\ & n & -8 \end{array}$$

$$(3n+1)(n-8)=0$$

$$\text{DE AQUÍ: } n = -\frac{1}{3} \quad ; \quad n=8$$

$$\text{EN (2), OBS: } \# \text{TÉRMINOS} = 13$$

$$\text{LUEGO: } t_{11} = (x^2)^{13-11} (y^3)^{11-1}$$

$$\leadsto t_{11} = x^4 y^{30} \therefore \text{GA}(t_{11}) = 34$$

$\textcircled{55}$ FACTORICEMOS POR ASPA DOBLE ESPECIAL:

$$8x^4+4x^3+2x^2+3x+1$$

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 & & 1 \\ & \nearrow & \searrow \\ & 4x & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ 2x & & -x \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 * \text{SOT: } 2x^2 \\ 1 * \text{ST: } 6x^2 \\ \text{FALTA: } -4x^2 \end{aligned}$$

$$P(x) = (4x^2+4x+1)(2x^2-x+1)$$

$$\begin{aligned} \text{CON ESTO:} \\ \text{(I) ES F; (II) ES V; (III) ES F} \\ \therefore \text{FVF} \end{aligned}$$

$$\textcircled{56} P(x) = \underline{x^{n+2}} + \underline{x^n} + \underline{x^3} + \underline{x} - \underline{x^2} - \underline{1}$$

$$P(x) = x^n(x^2+1) + x(x^2+1) - (x^2+1)$$

$$= (x^2+1)(x^n+x-1)$$

$$\therefore \text{UN FACTOR EJ: } x^n+x-1$$

NOTA: EL PROB. SÓLO DEBE PEDIR UN FACTOR DE $P(x)$, MÁS NO UN FACTOR PRIMO, PORQUE SIENDO n NATURAL CON $n \geq 5$, EL POLINOMIO x^n+x-1 NO ES PRIMO, ADMITE FACTORIZACIÓN (VÉALO EN LA RESOL. SIGTE.)

$$\textcircled{57} P(x) = \frac{x^{10} + 2x^6 + x^2 - 1}{\text{TCP}}$$

$$= (x^5+x)^2 - 1$$

$$= (x^5+x+1)(x^5+x-1)$$

(1)
(2)

DE (1): HACEMOS SUITA Y PDN:

$$\begin{aligned} (+) \quad & \underline{x^5+x+1} + \underline{x^2-x^2} \\ &= x^2(x^3-1) + (x^2+x+1) \\ &= x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1) \\ &= (x^2+x+1)(x^3-x^2+1) \end{aligned}$$

DE (2): SIMILAR

$$\begin{aligned} (+) \quad & \underline{x^5+x-1} + \underline{x^2-x^2} \\ &= x^2(x^3+1) - (x^2-x+1) \\ &= x^2(x+1)(x^2-x+1) - (x^2-x+1) \\ &= (x^2-x+1)(x^3-x^2-1) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{# DE FACT. PRIMOS: } 4$$

$$\textcircled{58} P(x) = x^2(b+c+2d)x + d^2+4b+c+d$$

FACTORIZEMOS LOS TÉRMINOS MARCADOS (ASPA SIMPLE).

$$d^2+4b+c+d = (d+b)(d+c)$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ d & \times & b \\ & \downarrow & \\ & c & \end{array}$$

LUEGO:

$$P(x) = x^2(b+c+2d)x + (d+b)(d+c)$$

$$\begin{array}{ccc} x & \uparrow & d+b \\ x & \times & d+c \end{array}$$

$$(P(x) = (x+d+b)(x+d+c))$$

$$\therefore \text{UN FACT. PRIMO: } x+b+d$$

DE (2): SIMILAR

$$\textcircled{59} \text{ APLÍQUEMOS ASPA DOBLE, INTRODUZCAMOS } 0x^3:$$

$$f(x) = x^6 + 4x^4 + 3x^2 + 0x^3 - 2x - 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ x^3 & \times & 3x & \times & 1 & \times & 1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & x & & x & & x & \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x^3+3x+1)(x^3-x-1)$$

$$\sum \text{COEF.} = 5$$

60) $P(x,y) = x^{10} - y^8 x^2 + x^2 y - xy^9 + y^8 x^2 - y^{10}$

$P(x,y) = x^2(x^8 - y^8) + xy(x^8 - y^8) + y^2(x^8 - y^8)$

$= (x^8 - y^8)(x^2 + xy + y^2)$

$= (x^4 + y^4)(x^4 - y^4)(x^2 + xy + y^2)$

$= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)$

$= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

LUEGO, UN FACTOR PRIMO DE P ES:

$x^2 + xy + y^2$

CLAVE: C

61) $P = x^2 + x - y^2 + y - z^2 + z + 2yz$

$P = x^2 + x + y - z - (y^2 + z^2 - 2yz)$

$P = x(x+1) + (y-z) - (y-z)^2$

Diagram showing the grouping of terms: x and $(y-z)$ are grouped together, and $x+1$ and $-(y-z)$ are grouped together.

$+ -x(y-z) + (x+1)(y-z) = (y-z)$

$\rightarrow P = (x+y-z)(x+1-y+z)$

LUEGO, UNO DE LOS FACTORES DE P ES:

$x - y + z + 1$

CLAVE: B

62) $H = (x+y+z)(x+y+w)(x+z+w)$

$\cdot (y+z+w) - xyzw$

Sea: $x+y+z+w = a$, ENTONCES:

$H = (a-w)(a-z)(a-y)(a-x) - xyzw$

$H = a^4 - (x+y+z+w)a^3 + (xy+xz+xw+yz+yw+zw)a^2 + (xyz+xyw+xzw+yzw)a - xyzw$

$\rightarrow H = (xy+xz+xw+yz+yw+zw)a^2 + (xyz+xyw+xzw+yzw)a$

$\rightarrow H = a[(\quad)a + (\quad)]$

$H = (x+y+z+w)[(\quad)(x+y+z+w) + (\quad)]$

LUEGO, UN FACTOR PRIMO DE H ES:

$x+y+z+w$

CLAVE: C

63) FACTORIZANDO CADA POLINOMIO:

$P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

Diagram showing the grouping of terms: $2x^2$ and $-x$ are grouped together, x^2 and $0x$ are grouped together, and 3 and -3 are grouped together.

$\rightarrow P(x) = (2x^2 - x + 3)(x^2 - 3)$

$Q(x) = 10x^3 - 9x^2 + 17x - 6$

Diagram showing the grouping of terms: 10 and -9 are grouped together, 17 and -6 are grouped together, and 2 and -1 are grouped together.

$\rightarrow Q(x) = (2x-5)(2x^2 - x + 3)$

LUEGO: $MCD(P,Q) = 2x^2 - x + 3$

EL COEF. DE MAYOR VALOR ABS. 3

CLAVE: C

(64) SEAN $P(x)$ y $Q(x)$ LOS POLINOMIOS:

$$P(x) \cdot Q(x) = x^4 - 18x^2 + 81$$

$$\frac{\text{MCM}}{\text{MCD}} = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

PROPIEDAD: Para P y Q :

$$P(x) \cdot Q(x) \equiv \text{MCD} \cdot \text{MCM}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{MCD} \cdot \text{MCM} &= x^4 - 18x^2 + 81 \\ &= (x+3)^2(x-3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{PERO: } \text{MCM} = (x-3)^2 \cdot \text{MCD}$$

REEMPLAZANDO:

$$\text{MCD} \cdot (x-3)^2 \cdot \text{MCD} = (x+3)^2(x-3)^2$$

$$\rightarrow (\text{MCD})^2 = (x+3)^2$$

$$\rightarrow \text{MCD} = x+3$$

CLAVE: C

(65) FACTORIZANDO CADA POLINOMIO:

$$\begin{aligned} P &= x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 \\ &= x(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = x(x+y)^3 \end{aligned}$$

$$Q = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$$

3	5y	y ²	-y ³
-y	↓	-3y	-2y ²
3	2y	-y ²	0

$$\rightarrow Q = (x+y)(3x^2 + 2xy - y^2)$$

$$\rightarrow Q = (x+y)^2(3x-y)$$

$$\begin{aligned} R &= x^4 + xy^3 + x^3y + y^4 \\ &= x(x^3 + y^3) + y(x^3 + y^3) \end{aligned}$$

$$= (x+y)(x^3 + y^3)$$

$$\rightarrow R = (x+y)^2(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{LUEGO: } \text{MCD}(P, Q, R) = (x+y)^2$$

CLAVE: D

(66) $P_1(x) = ax^2 + 2x - b$; $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$$P_2(x) = ax^2 - 4x + b$$

$$\begin{aligned} \text{MCM}(P_1, P_2) &= x^3 - x^2 - 9x + 9 \\ &= (x-1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

$$\text{COMO: } \frac{P_1 \cdot P_2}{4^\circ} = \text{MCD} \cdot \underbrace{\text{MCM}}_{3^\circ}$$

$$\rightarrow \text{MCD ES DE GRADO 1.}$$

$\rightarrow P_1$ y P_2 TIENEN UN FACTOR COMÚN DE GRADO 1: $\rightarrow P_1 - P_2$ CONTIENE A ÉSTE

$$P_1(x) - P_2(x) = 6x - 2b = 6(x - \frac{b}{3})$$

COMO $b \in \mathbb{Z}^+$, ENTONCES:

$$x - \frac{b}{3} \equiv x - 1 \quad \vee \quad x - \frac{b}{3} \equiv x - 3$$

$$b = 3 \quad \vee \quad b = 9$$

$$\underline{b=3}: P_1(x) = ax^2 + 2x - 3$$

$$P_2(x) = ax^2 - 4x + 3$$

CONTIENEN AL FACTOR $(x-1)$

$$\rightarrow a = 1$$

$$\underline{b=9}: P_1(x) = ax^2 + 2x - 9$$

$$P_2(x) = ax^2 - 4x + 9$$

CONTIENEN AL FACTOR $(x-3)$; PERO

ÉSTO NO ES POSIBLE, PUES:

$$P_1(3) = 9a + 6 - 9 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$a \notin \mathbb{Z}^+$$

LUEGO: $T = 6^2 - 3 = 3^2 - 1 = 8$

CLAVE: C

(67) FACTORIZANDO CADA POLINOMIO:

$P(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 14x + 8$

Diagrama de cruce para $P(x)$:
 $\begin{matrix} x^2 & & 3x & & 4 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ x^2 & & 2x & & 2 \end{matrix}$
 FALTA: $6x^2$

$P(x) = (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 2x + 2)$

$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 21x + 12$

Diagrama de cruce para $Q(x)$:
 $\begin{matrix} x^2 & & 3x & & 4 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ x^2 & & 3x & & 3 \end{matrix}$
 FALTA: $7x^2$

$Q(x) = (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x + 3)$

LUEGO: $MCD(x) = x^2 + 3x + 4$

$\therefore \sum \text{COEF.}(MCD) = 8$

CLAVE: E

(68) FACTORIZANDO CADA POLINOMIO:

$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$= x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^2-1)$

$\rightarrow P(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

Tabla de Ruffini para $Q(x)$ con $x = -1$:

	1	-1	-5	-3
$x = -1$	↓	-1	2	3
	1	-2	-3	0

$\rightarrow Q(x) = (x+1)(x^2 - 2x - 3)$

Diagrama de cruce para $Q(x)$:
 $\begin{matrix} x & & -3 \\ & \searrow & \\ x & & 1 \end{matrix}$

$\rightarrow Q(x) = (x+1)^2(x-3)$

LUEGO: $MCD(x) = (x+1)(x-3)$

$\therefore T(MCD) = MCD(0) = -3$

CLAVE: A

(69) EXTRAJENDO LA RAÍZ CUADRADA:

Procedimiento de división para $Q(x) = 4x^4 - 16x^3 + 28x^2 - 16x + 4$ entre $2x^2 - 4x + 7$:

$4x^4$	$-16x^3$	$+28x^2$	$-16x$	$+4$
$-4x^4$				
0	$28x^3$	$-56x^2$	$+49x$	-49
	$-28x^3$	$+56x^2$	$-49x$	
0	0	0	0	0

LUEGO, LA RAÍZ ES: $q(x) = 2x^2 - 4x + 7$

$\therefore \sum \text{COEF.}(q) = 5$

CLAVE: C

(70) EXTRAJENDO LA RAÍZ CUADRADA:

Procedimiento de división para $P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 12x - 5$ entre $x^2 + 2x + 1$:

x^4	$+4x^3$	$+6x^2$	$-12x$	-5
$-x^4$				
0	$-4x^3$	$-4x^2$		
	$2x^3$	$-12x^2$	-5	
	$-2x^3$	$-4x$	-1	
		$-16x$	-6	

COMO $R(x) = ax + b = -16x - 6$

$\rightarrow a = -16 \wedge b = -6$

$\therefore T = a - b = -10$

CLAVE: A

(71) $A > 0$

$P(x) = 9x^4 - 12x^3 + Ax^2 + (8-5)x + 25$

TIEVE RAÍZ CUADRADA EXACTA,

ESTÁ DEBER SER: $q(x) = 3x^2 - 2x + 5$

LUEGO:

$$9x^4 - 12x^3 + Ax^2 + (B-5)x + 25 \equiv (3x^2 - 2x + 5)^2$$

DADA $x=1$:

$$9 - 12 + A + B - 5 + 25 = (3 - 2 + 5)^2$$

$$A + B + 17 = 36$$

$$\therefore A + B = 19$$

CLAVE: D

$$\textcircled{72} T = \sqrt{3x+4+2\sqrt{2}\sqrt{8x}} - \sqrt{3x+3+2\sqrt{3}\sqrt{x}}$$

RECUERDE QUE: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \quad (a > b)$$

$$T = \sqrt{3x+4+2\sqrt{4}\sqrt{3x}} - \sqrt{3x+3+2\sqrt{3}\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow T = (\sqrt{3x+4} + \sqrt{4}) - (\sqrt{3x+3} + \sqrt{3})$$

$$T = \sqrt{4} - \sqrt{3} = \sqrt{4+3-2\sqrt{4 \cdot 3}}$$

$$\therefore T = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

CLAVE: A

$\textcircled{73}$ NÓTESE QUE:

$$(3+\sqrt{2})^3 = 27 + 27\sqrt{2} + 18 + 2\sqrt{2} = 45 + 29\sqrt{2}$$

ENTONCES:

$$E = \frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{9+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$$

$$E = \frac{2\sqrt{11+2\sqrt{9 \cdot 2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt[3]{(3+\sqrt{2})^3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{3(3+\sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} - 2\sqrt{6}$$

$$\rightarrow E = \frac{2(3+\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{5(3+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{3(3+\sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} - 2\sqrt{6}$$

$$E = (3+\sqrt{2}) \left[\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right] - 2\sqrt{6}$$

$$E = (3+\sqrt{2}) \left[\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right] - 2\sqrt{6}$$

RACIONALIZANDO CADA FRACCIÓN:

$$E = (3+\sqrt{2}) \left[\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{10} - \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{-2\sqrt{6}} \right] - 2\sqrt{6}$$

$$E = (3+\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \right) - 2\sqrt{6}$$

$$E = (3+\sqrt{2}) \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) - 2\sqrt{6}$$

$$E = -\frac{9\sqrt{2}}{2} - 3 - 2\sqrt{6}$$

NO HAY CLAVE

$$\textcircled{74} T = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{2x^3+x^2+2x}; x > 0$$

$$T = \sqrt{x^2+x+1} - 2\sqrt{\frac{x(2x^2+x+2)}{4}}$$

$$T = \sqrt{x^2+x+1} - 2\sqrt{\frac{x}{2} \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1 \right)}$$

NÓTESE QUE:

$$\frac{x}{2} + x^2 + \frac{x}{2} + 1 = x^2 + x + 1$$

$$\rightarrow T = \sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + 1} - \sqrt{\frac{x}{2}}$$

CLAVE: C

$$\textcircled{75} E = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}}$$

$$E = \frac{\sqrt{7+2\sqrt{4 \cdot 3}}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28-2\sqrt{25 \cdot 3}}}$$

$$E = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{25} - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}$$

$$E = \frac{(2 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})}{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})} = \frac{10 + 3\sqrt{3} - 3}{25 - 3}$$

$$\therefore E = \frac{7 + 3\sqrt{3}}{22}$$

CLAVE: C

$$76) M = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$$

$$M = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{[(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5]^2}$$

$$M = \frac{2(5 + \sqrt{6} - \sqrt{10} - \sqrt{15})}{(2\sqrt{6})^2}$$

$$\rightarrow M = \frac{(5 + \sqrt{6} - \sqrt{10} - \sqrt{15})^2}{12}$$

CLAVE: E

$$77) T = \frac{A}{(2 + \sqrt{2} - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2} + \sqrt{2})}$$

$$T = \frac{A(2 + \sqrt{2} + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}$$

$$T = \frac{A(2 + \sqrt{2} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{3(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$$

$$T = \frac{A(2 + \sqrt{2} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{3(2)}$$

$$T = \frac{A(2 + \sqrt{2} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{6}$$

CLAVE: D

$$78) M = \frac{1}{\frac{3\sqrt{49} - 3\sqrt{7} - 6}{3\sqrt{7} \times -3} \times \frac{3\sqrt{7} \times 2}{2}}$$

$$M = \frac{1}{(3\sqrt{7} - 3)(3\sqrt{7} + 2)} = \frac{-1}{(3 - 3\sqrt{7})(3\sqrt{7} + 2)}$$

$$M = \frac{(-1) \cdot FR_1 \cdot FR_2}{(3 - 3\sqrt{7})(3\sqrt{7} + 2) \cdot \frac{FR_1 \cdot FR_2}{FR_1 \cdot FR_2}}$$

$$M = \frac{-FR_1 \cdot FR_2}{(3^3 - 7)(7 + 2^3)} = \frac{-FR_1 \cdot FR_2}{(20)(15)}$$

$$\rightarrow M = \frac{-FR_1 \cdot FR_2}{300}$$

CLAVE: B

$$79) p \Delta q \text{ es } V, \wedge \sim x \rightarrow y \text{ es } V$$

luego: $p \vee q$ TIENEN VALORES OPUESTOS

$$\sim x \rightarrow y \equiv x \vee y \text{ es } V$$

$$I. \text{ } \text{---} \rightarrow \sim p \vee \sim q$$

V pues uno de ellos es V

$$\equiv \text{---} \rightarrow V \equiv V$$

$$II. p \leftrightarrow \sim q \text{ es } V$$

pues p y $\sim q$ TIENEN EL MISMO VALOR.

$$III. (\sim x \wedge \sim y) \rightarrow t \equiv \sim(x \vee y) \rightarrow t$$

$$\equiv \sim(V) \rightarrow t \equiv F \rightarrow t \equiv V$$

$$\therefore VVV$$

CLAVE: A

80) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es F

ENTONCES: p es V y $q \rightarrow r$ es F

ENTONCES: p es V; q es V y r es F.

$q \leftrightarrow (p \rightarrow t)$ es F.

ENTONCES $p \rightarrow t$ es F y como p es V

ENTONCES t es F.

I. $\sim t \wedge (r \rightarrow w) = V \wedge (F \rightarrow w)$

$= V \wedge (V) = V$

II. $q \vee (\sim r \leftrightarrow u) = V \vee (\sim r \leftrightarrow u)$

$= V$

III. $t \rightarrow (s \Delta r) = F \rightarrow (s \Delta r)$

$= V$

$\therefore VVV$

CLAVE: A

81) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \rightarrow t)$ es F

ENTONCES: $p \wedge \sim q$ es V y $r \rightarrow t$ es F

ENTONCES:

p es V; q es F; r es V y t es F.

I. $(r \leftrightarrow t) \vee \sim r = (V \leftrightarrow F) \vee F$

$= (F) \vee F = F$

II. $[(r \rightarrow p) \wedge (t \vee r)] \vee (\sim t) =$

$= [(V \leftrightarrow V) \wedge (F \vee V)] \vee (V)$

$= [(V) \wedge (V)] \vee V = V$

III. $(\sim p \rightarrow r) \vee \sim t = (F \rightarrow V) \vee V =$

$= (V) \vee V = V$

$\therefore FVV$

CLAVE: D

82) $S: (r \rightarrow p) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow r)$

I. p es V y q es V

$S = (r \rightarrow V) \leftrightarrow (F \rightarrow r)$

$= (V) \leftrightarrow (V) = V$

S SIEMPRE ES V, PARA CUALQUIER VALOR DE r. (F)

II. r es F y S es F, SE TIENE:

$(F \rightarrow p) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \dots) = F$

$(V) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow F) = F$

ENTONCES $\sim q \rightarrow F = F$

ENTONCES $\sim q = V$; q es F. (V)

III. r es V y p es F, SE TIENE:

$S = (V \rightarrow F) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow V)$

$S = (F) \leftrightarrow (V) = F$ (F)

$\therefore FVF$

CLAVE: B

83) $[\sim p \rightarrow \sim (p \rightarrow q)] \vee [(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p]$

$= [\sim p \rightarrow \sim (\sim p \vee q)] \vee [(p \wedge (\sim p \vee q)) \rightarrow p]$

$= [\sim p \rightarrow (p \wedge \sim q)] \vee [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \rightarrow p]$

$= [p \vee (p \wedge \sim q)] \vee [(F \vee (p \wedge q)) \rightarrow p]$

$= [p] \vee [(p \wedge q) \rightarrow p]^{p \wedge q}$

PUES: $p \vee (p \wedge \sim q) = p$

$= p \vee [\sim (p \wedge q) \vee p]$

$= p \vee (\sim p \vee \sim q) \vee p]$

$= p \vee [V \vee \sim q]$; pues $\sim p \vee p = V$

$= p \vee [V] = V$

CLAVE: D

$$84) [p \rightarrow (q \vee r)] \wedge [p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)] = S$$

NÓTESE QUE:

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv p \rightarrow \sim(\sim q \vee \sim r) \\ &\equiv p \rightarrow \sim(q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee \sim(q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim[p \wedge (q \rightarrow r)] \end{aligned}$$

luego, S QUEDARÁ ASÍ:

$$S = [p \rightarrow (q \vee r)] \wedge [\sim[p \wedge (q \rightarrow r)]] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]$$

$$S = [p \rightarrow (q \vee r)] \wedge [\sim t \wedge t]$$

$$S = [\quad] \wedge F = F \quad \text{CLAVE: E}$$

$$85) \sim[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)] \vee (p \rightarrow q)$$

$$\equiv \sim[(q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)] \vee (\sim p \vee q)$$

$$\equiv \sim[(q \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee q)] \vee (\sim p \vee q)$$

$$\equiv \sim[(q \vee \sim p) \wedge \sim p] \vee (\sim p \vee q)$$

$$\equiv \sim[(\sim p) \wedge q] \vee (\sim p \vee q)$$

$$\text{pues: } (q \vee \sim p) \wedge \sim p = \sim p$$

$$\equiv \sim[(\sim p \wedge q) \vee \sim p] \vee q$$

$$\equiv \sim[(\sim p) \vee q]$$

$$\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$$

$$\equiv p \wedge q \quad \text{CLAVE: A.}$$

$$86) p \neq q = \{p \vee ((r \rightarrow p) \wedge p)\} \Delta \underbrace{\{q \wedge (p \rightarrow \sim p)\}}_F$$

$$\rightarrow p \neq q = \{p \vee (\sim r \vee p) \wedge p\} \Delta F$$

$$p \neq q = \{p \vee (p)\} \Delta F = p \Delta F$$

$$p \neq q = p. \quad \begin{array}{c} V \\ F \end{array} \begin{array}{c} V \\ F \end{array}$$

CLAVE: A'

87)	p	q	p * q	~(p * q)
	V	V	F	F (V)
	V	F	F	F (V)
	F	V	F	F (V)
	F	F	V	V (F)

SE NOTA QUE:

$$p * q \equiv \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

7) TAMBIÉN, NÓTESE QUE:

$$p * q \equiv q * p \quad \wedge \quad r * r \equiv \sim r$$

luego:

$$\begin{aligned} (p * q) * (q * p) &\equiv (p * q) * (p * q) \\ &\equiv \sim(p * q) \equiv \sim[\sim(p \vee q)] \\ &\equiv p \vee q \end{aligned}$$

CLAVE: G

88)	p	q	p * q	~(q * p)
	V	V	F	F (V)
	V	F	F	F (V)
	F	V	V	V (F)
	F	F	F	F (V)

SE NOTA QUE:

$$p * q \equiv \sim(q \rightarrow p) \equiv q \wedge \sim p$$

luego:

$$[p * (\sim p * q)] * q \equiv [p * (q \wedge \sim p)] * q$$

$$\equiv [(q \wedge \sim p) \wedge \sim p] * q$$

$$\equiv [q \wedge (\sim p \wedge \sim p)] * q$$

$$\equiv [q \wedge (F)] * q \equiv F * q$$

$$\equiv q \wedge (\sim F) \equiv q \wedge V \equiv q \quad \text{CLAVE: D}$$

89)	p	q	p * q
	V	V	F
	V	F	F
	F	V	V
	F	F	F

AL IGUAL QUE EN EL PREG. ANTERIOR

$$p * q \equiv \sim(q \rightarrow p) \equiv q \wedge \sim p$$

luego:

$$(s * t) * (t * s) \equiv (t \wedge \sim s) * (s \wedge \sim t)$$

$$\equiv (s \wedge \sim t) \wedge \sim(t \wedge \sim s)$$

$$\equiv (s \wedge \sim t) \wedge (\sim t \vee s)$$

$$\equiv s \wedge [\sim t \wedge (\sim t \vee s)]$$

$$\equiv s \wedge (\sim t) \equiv \sim(s \rightarrow t) \equiv V$$

ENTONCES: $s \rightarrow t$ es F

luego: s es V y t es F

$$\sim(s * t) = \sim(t \wedge \sim s) = \sim t \vee s$$

$$= t \rightarrow s \equiv V$$

$$\therefore \sim(s * t) \equiv V$$

CLAVE: A

SEGUNDO SEMINARIO TALLER DE ÁLGEBRA

PRE-UNI 2005-II

CONTIENE:

- **TEORÍA DE CONJUNTOS**
- **NÚMEROS REALES**
- **ECUACIONES DIVERSAS**
- **INECUACIONES**



LIMA - PERÚ



01. Dado el conjunto

$A = \{1; \{1; 1\}, \phi, \{\phi\}\}$, Indique cuál(es) de las siguientes proposiciones son correctas:

I. $\{1; \{\phi\}\} \subset A$

II. $\{\phi, \{\phi\}\} \subset A$

III. $\{1\} \in A$

A) I y II B) sólo II

C) sólo III D) I, II y III

E) I y III

02. Dado el conjunto

$A = \{2; 3; \{2\}; \phi; \{2; 3\}; \{\phi\}\}$, indique cuántas de las proposiciones siguientes son correctas:

I. $\{2; 3\} \in A$

II. $\phi \in A$

III. $\{\phi\} \subset P(A)$

IV. $\{2; 3\} \subset A$

V. $\{\phi\} \subset A$

VI. $\{2; 3; \{3\}\} \in P(A)$

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

03. Dados tres conjuntos no vacíos

A, B y C, simplifique:

$[A^c \cap (B - C^c)^c]^c \cup (B \Delta C)$

A) $(A \cup B) \cap C$

B) $(A \cup B) - C$

C) $(A \cap B) \cup C$

D) $(A \cup B) \cup C$

E) $(A \cap B) \cap C$

04. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $(A \cap B)^c \cap (A^c \cup B) = A^c$

II. $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = B$

III. $(A - B) \cup (B^c - A^c) = A - B$

A, B, C son conjuntos del universo U.

A) FFF

B) FVF

C) VVV

D) VFF

E) FFV

05. Si $E \subset A$, entonces al simplificar $[A - (B - E)] \cup [(A - B)^c \cap E^c]$, se obtiene:

A) A

B) E

C) B

D) U

E) ϕ

06. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $(A - B)^c \cup A = A \cup B$

II. $A^c \subset (A \cup B) \Rightarrow B^c \subset A$

III. Si $A = \{\phi; \{\phi\}\}$ entonces $\phi \in P(A)$.

A) FVV

B) FFV

C) VFV

D) VVV

E) VVF

07. Si A, B y C son conjuntos y $A \cap C = \phi$ entonces el conjunto $[(C \cup B) \cap A] \cup C^c \cap B$ es igual a:

A) $A - B$

B) B

C) $C \cap A$

D) $B \cap C^c$

E) $A^c \cap B$

08. Sean A, B y C tres conjuntos del universo U tal que:

$$M = [(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C)] - (A \cap C) \cap C^c - B;$$

simplificando se obtiene:

A) A

B) B

C) C

D) $A \cap C$

E) ϕ

09. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(A \cap B) \subset D \Rightarrow A^c \subset D^c \vee B^c \subset D^c$

II. $(A \cap B) \subset D \cup E \Rightarrow A \subset D \vee B \subset E$

III. $A \subset (D \cup E) \wedge B \subset (D \cap E) \Rightarrow$

$(A \cup B) \subset (D \cup E)$

A) VVV

B) VFV

C) FFV

D) FFF

E) FVF

10. Al simplificar

$(A \cap B) \cup (C \cap B \cap A) \cup$

$[(A \cap C)^c \cup (B^c \cup D^c)]^c$

A, B, C conjuntos del universo U se obtiene:

A) A

B) B

C) D

D) $A \cap B$

E) $B \cap C$

11. Al simplificar:

$$\{[(A \cap B)^c \cap (A^c \cup B)]^c \cup (A - B) \cup (B^c - A^c)\} \Delta A$$

Donde A, B, C conjuntos del universo U, se obtiene:

- A) $A \cup B$ B) $A \cap B$
C) $A - B$ D) $B - A$ E) ϕ

12. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. Si $A \cap B^c = \phi \Rightarrow A - B = A$

II. Si $C = (A - B) \cap B \Rightarrow$

$$((B - A) \cup C) \cup A = A \cup B$$

III. Si $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 + 1 = 0\} \wedge$
 $B = \{x \in \mathbb{R} / x - x = 1\} \Rightarrow$
 $A^c \cap B^c = U$

- A) FVV B) VFV C) FVF
D) VVF E) VVV

13. Si A, B, C son conjuntos del universo U. Tal que $A \cap C = E$ al simplificar $[(A - B) - C^c] \cap (E - B)^c$ se obtiene:

- A) A B) B C) C
D) E E) ϕ

14. Dados los conjuntos A, B y C Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$

II. $(A - B) \cap C^c = A - (B \cup C)$

III. $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

IV. $A \cap [B - (B - C)] = (A \cup B) \cap (C \cup A)$

- A) VFFF B) VVVF C) VVVV
D) VFVF E) VFFV

15. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $A, B \subset U \Rightarrow (A - B) \in P(U)$

II. $A \Delta B \in P(A)$

III. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) VVF E) VFF

16. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \subset P(A \cup B)$, $\forall A, B$ conjuntos.

II. $[(A - B) - A] - B^c \in P(M)$, $\forall A, B, M$ conjuntos.

III. $x^2 = 4 \rightarrow (x \leq -2 \vee x \geq 2)$.

IV. $P(\{\phi\}) - \{\phi\} \neq \{\{\phi\}\}$

- A) VVVV B) VVVF
C) VFVF D) FFVV
E) FFFV

17. Si $A \subset B$ y si $n(A \Delta B) = 12$, $n(A \cup B) = 27$ ¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?

- A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

18. Si $n(C) = 26$, $n(A \cup B \cup C) = 56$, $n(B - C) = 19$, entonces el valor de $n[A - (B \cup C)]$, es:

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

19. Si $n(P(A)) = 32$, $n(P(B)) = 128$, $n(P(A \cap B)) = 8$, entonces el valor de $n(P(A \Delta B))$, es:

- A) 4 B) 8 C) 16
D) 32 E) 64

20. Sean A y B dos conjuntos no vacíos; tales que:

$$n[P(A \cup B)] = 32; n[P(A \cap B)] = 4$$

$$n[P(B - A)] = 4. \text{ Calcule el cardinal de } P(A - B).$$

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

21. Sean M, P y S subconjuntos de U tales que:

$$n(M \cap P \cap S) = 200, n(U) = 2000,$$

$$n[M^c \cap P^c \cap S^c] = 150,$$

$$n[M \cap P \cap S^c] = 450$$

$n[M \cap (P \cup S)^c] = 250$,
 $n(M) = 1050$, $n[(P-M) \cap (P-S)] = 400$
 $n[p \cap S] = n[S \cap (M \cup P)^c]$.
 Determine $n[(M \cap P) \Delta (P \cap S)]$.
 Si $A \cap B = A^c \cup B^c$.

- A) 550 B) 450 C) 350
 D) 250 E) 150

22. En una institución deportiva de 58 personas de los cuales:
 38 juegan fútbol
 15 juegan básquet
 20 juegan béisbol
 03 juegan los tres deportes
 ¿Cuántos juegan en dos de los tres deportes?
 A) 15 B) 10 C) 7
 D) 9 E) 12

23. De un total de 1,000 camisas se piensa eliminar aquellas que tengan 3 fallas y vender a la mitad de precio las que tengan solo dos de ellas. Si luego de la inspección de las camisas no se eliminó a 987 de ellas y se vendieron, pero no a mitad de precio 875 camisas; 500 de las cuales no tenían fallas, calcule cuántas camisas tenían solamente una falla.
 A) 200 B) 375 C) 500
 D) 50 E) 84

24. Dado $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
 I. $\exists x \in M / 3x - 5 \in M$
 II. $\forall x \in M : \exists y \in M / x + y \leq 7$
 III. $\exists x \in M / \forall y \in M : x + y = 7$
 A) VVV B) VFF C) VVF
 D) FVV E) FFV

25. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{1, 3, 7\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $\forall x, y \in A : \exists z \in U / x + y + z \geq 10$
 II. $\forall x \in A : \exists y \in U / \forall z \in A : x + z^2 \geq 10 - y$
 III. $\sim (\forall x \in A : \exists y \in A / x + y \geq 5)$
 A) VVV B) VFF C) FVF
 D) FFV E) VVF

26. Dado el universo $U = \langle -6; 4 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$ y los conjuntos $A = \{x \in U / x < 2 \rightarrow x > 5\}$, determine $B = \{3 - x / x \in A \wedge x \in Z\}$ e indique el producto de sus elementos.
 A) 0 B) -3 C) -5
 D) 6 E) 12

27. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:
 I. $(\exists x \in N / x + 12 = 12) \wedge (\forall x \in N : x^2 > x)$
 II. $(\forall x \in Z : -x < 0) \vee (\exists x \in Z / x = -x)$
 III. $(\exists x \in R / \sqrt{-x} \in R) \rightarrow (\forall x \in R : x^2 \leq 0)$
 A) FVF B) FVV C) FFF
 D) VVF E) VVV

28. Dado el conjunto $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
 I. $\exists x \in A / x + 4 = 9$
 II. $\forall x \in A : 2x - 5 < 5$
 III. $\exists x \in A / 2x - 4 = x$
 IV. $\forall x \in A : x + 3 \leq 7$
 A) FVV B) FVV C) VVV
 D) FFFV E) VVVF

29. Dado el conjunto

$A = \{z, y, x \in \mathbb{Z} / 10, 2^{11}, \text{múltiplo de } 3\}$

Cuál(es) de los siguientes enunciados es correcto

$p: \exists x \in A / x + y + z = \text{par}$

$q: \forall x \in A: x + y + z = \text{impar}$

$r: \forall x \in A: \exists y \in A / x + y - z = \text{impar}$

A) VFF B) VVV C) FVV

D) FFV E) VFV

30. Determine la negación de la proposición:

$p: \forall x \in \mathbb{R}: \exists y \in \mathbb{Q} / x + y < 2 \rightarrow xy \geq 3$

A) $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q}: x + y > 2 \rightarrow xy \leq 3$

B) $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q}: x + y \geq 2 \rightarrow xy < 3$

C) $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q}: x + y < 2 \wedge xy < 3$

D) $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q}: x + y \leq 2 \wedge xy < 3$

E) $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q}: x + y \leq 2 \wedge xy \geq 3$

31. Sea $U = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x > 4 \rightarrow x = 6\}$

$p: \forall x: \exists y / x^2 + y^2 < 13$

$q: \exists x / \forall y: x^2 + 2y < 10$

Al simplificar

$M = (p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow [(r \leftrightarrow \sim p) \vee (q \rightarrow s)]$ se obtiene:

A) p B) q C) s

D) V E) F

32. Determine cuantas de las proposiciones son axiomas en el sistema de los números reales:

I. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a + (b+c) = (a+b)+c$

II. $\forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 0 = 0$

III. $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

IV. $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

V. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \leq b \vee b < a$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

33. De las proposiciones siguientes:

I. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a + b \leq 1$, entonces: $ab \leq 1/4$

II. $\forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 0 = 0$ no es un axioma de los números reales.

III. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Son correctas:

A) I y II B) II y III C) I y III

D) I, II y III E) solo I

34. En $\mathbb{R}$ se define la operación

"+" mediante $a * b = a + b + 5$;

$\forall a, b \in \mathbb{R}$; según esta operación. Determine el producto del elemento neutro de la operación * con el inverso de 3.

A) 50 B) 64 C) 80

D) 65 E) 70

35. Se define la operación "+" en $\mathbb{R}$ mediante la siguiente relación $a * b = 2a + 2b + 3 \forall a, b \in \mathbb{R}$, establecer el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $(2*3) * 5 = 39$

II. La operación * es conmutativa.

III. La operación * es asociativa

IV. La operación * tiene elemento neutro.

A) VVVV B) VVVF C) VVFF

D) VFFF E) VFVF

36. Se define la operación binaria "+" en $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que $a * b = 5ab$, además x^{-1} es el inverso de x

respecto de "+". Calcule $\left(\frac{1}{625}\right)^{-1}$

A) 25 B) 5 C) 125

D) 625 E) 1

37. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. En $\mathbb{R}$ los elementos identidad aditiva e identidad multiplicativa

son $\frac{1}{3}a-5$ y $\frac{1}{5}b-8$
respectivamente, entonces
 $a+b=60$.

II. Si $a=7$ y $b=8$ son elementos
opuestos de la adición en R ,
entonces $a+b=15$.

III. Si $a=4$ y $b=3$ son elementos
inversos de la multiplicación en
 R , entonces $ab+11=3a+4b$.

- A) FFV B) FFF C) VVV
D) VFF E) VFV

38. Indique el valor de verdad de
las proposiciones siguientes si
 a, b y $c \in R^+$.

$$r_1: (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

$$r_2: 8a+27b+c=6 \rightarrow (abc)_{\min} = \frac{1}{27}.$$

$$r_3: 2a + \frac{1}{72}b = 5 \rightarrow (ab)_{\max} = 225$$

- A) VFV B) FFF C) VVV
D) VVF E) FVF

39. Si $\{a, b, c\} \subset R \wedge c > b > a > 0$,
entonces el menor valor de "p"
que satisface:

$$p(a+b+c) > \frac{a^3-b^3}{3c(b-a)} \text{ es:}$$

- A) 1 B) 3 C) 3/2
D) 4/3 E) 1/2

40. Indique el valor de verdad de las
proposiciones siguientes:

I: $\forall a, b, c \in R^+, a^2 + b^2 + c^2 \geq$
 $ab + bc + ca$

II: $\forall a, b, c \in R$, si $a < b \wedge b < c$
 $\rightarrow a < c$ es un axioma del
sistema R .

III: $\forall a \in R^+: \sqrt{a} \leq a$

- A) VVV B) VVF C) FVV
D) VFF E) FFF

41. Indique el valor de verdad de las
proposiciones siguientes.

p: $\forall a, b \in R$ si $a = b$ entonces
 $a^{-1} = b^{-1}$.

q: $\exists a, b \in R / \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$.

r: $\forall a \in R, \exists x \in R / a^0 = x$.

s: Si $\forall b$ real y a racional $\exists a^b$
entonces $\exists b^a$.

- A) FVFF B) VFFF C) FVVF
D) FVVF E) VVFF

42. Si $a \in R^+$ y $-b \in R^+$, indique el
valor de verdad de las
proposiciones siguientes:

I. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ II. $b(b-a) > 0$

III. $\frac{b^3}{a} - b^2 < 0$ IV. $a^2 < b^2$

- A) VVFF B) FVV C) VVV
D) VFVF E) VVV

43. Si $a > 0, b > 0$ determine el
menor valor de k tal que

$$\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3} \leq k$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

44. Determine el conjunto S definido
mediante:

$$S = \left\{ x \in R / \frac{5x-6}{25x^2-4} + \frac{5x-18}{12x-30x^2} + \frac{1}{6x} = \frac{4x-5}{20x^2+8x} \right\}$$

- A) $\{-1\}$ B) $\left\{-\frac{7}{11}\right\}$
C) $\left\{-\frac{5}{11}\right\}$ D) $\left\{-\frac{2}{11}\right\}$
E) $\left\{-\frac{3}{11}\right\}$

45. Resolver la ecuación:

$$\frac{x-a}{x-a-1} - \frac{x-a-1}{x-a-2} = \frac{x-b}{x-b-1} - \frac{x-b-1}{x-b-2}$$

- A) $a-b$ B) $\frac{a-b+3}{2}$
 C) $\frac{a-b-3}{2}$ D) $\frac{a+b+3}{2}$
 E) $\frac{a+b-3}{2}$

46. Resolver la ecuación en "x"

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}} - \frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x-b}} - \frac{1}{\sqrt{x+b}}$$

se obtiene:

- A) $a\sqrt{b}$ B) $b\sqrt{a}$ C) ab
 D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

47. Al resolver la ecuación en "x":

$$\frac{a+x}{1+a+ab} + \frac{b+x}{1+b+ab} =$$

$$\frac{x-a}{1-a+ab} + \frac{x-b}{1-b+ab}$$

se obtiene:

- A) $a+b+1$ B) $a+b-1$
 C) $ab+1$ D) $ab-1$
 E) ab

48. Al resolver la ecuación en "x"

$$\frac{x-1}{x+a-b} = \frac{1-x}{x-a+b} + 2, \text{ se obtiene}$$

- A) $(a+b)^2$ B) $(a-b)^2$ C) ab
 D) a^2+b^2 E) a^2-b^2

49. Resolver la ecuación:

$$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} + 3 = 0$$

Que admite 2 soluciones

si $a+b+c \neq 0 \wedge a^3+b^3+c^3 = 3abc$

- A) $a+b+c$ B) $\frac{a+b+c}{3}$
 C) $ab+ac+bc$ D) $\frac{a+b+c}{2}$
 E) $\frac{ab+ac+bc}{3}$

50. Tu tienes la mitad de lo que tenías y tendrás el triple de lo que tienes, pero si tuvieras lo que tienes, tenías y tendrás; tendrías lo que yo tengo, que es \$ 9 más de lo que tendrás ¿Cuánto tenemos los dos juntos?

- A) \$ 21 B) \$ 22 C) \$ 23
 D) \$ 24 E) \$ 25

51. Determine el máximo valor de "m" para que al resolver la ecuación cuadrática en x:

$$x^2 + (a+b+c)x + m(ab+ac+bc) = 0$$

tenga raíces reales; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- A) 1 B) -1 C) 1/2
 D) 1/4 E) 3/4

52. Si a y b son las raíces de $x^2 - 100x + 1 = 0$, determine el valor de $T = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

- A) $\sqrt{101}$ B) $\sqrt{102}$ C) $\sqrt{103}$
 D) $\sqrt{104}$ E) $\sqrt{105}$

53. Al resolver la ecuación en "x":

$$\frac{b(a+1)}{x-a} + \frac{a(b+1)}{x-b} = 2, \text{ se obtiene}$$

$$x_1 = m + n$$

$$x_2 = n/2 \neq ab + a + b, \text{ calcule}$$

$$T = n^2 - 2m$$

- A) $a^2 + b^2$ B) $a^2 - b^2$ C) $4ab$
 D) $2ab$ E) $a^2 b^2$

54. Si $a < 0 < b$. Resuelva la

Inecuación: $\frac{ax-b}{a} + \frac{bx-a}{b} \leq 2$

- A) $\left[\frac{a^2+b^2}{ab}; \infty \right)$ B) $\left[\frac{a}{b}; \frac{b}{a} \right]$

C) $\left(-\infty; \frac{a^2+b^2}{ab}\right]$

D) $\left(-\infty; \frac{(a+b)^2}{2ab}\right]$

E) $\left[\frac{(a+b)^2}{2ab}; \infty\right)$

55. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto:

$S = \{x^2/x \in \mathbb{Z}, -9 < 2x - 1 < 11\}$

A) 51 B) 12 C) 63

D) 31 E) 102

56. Sean los conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{B} / 1 - x < 2x\}$ y

$B = \{2x - 1 / 3x \leq 4 - x\}$,

determine $T = 3a - b$, donde

$A = \{a; b\}$

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

57. Resolver:

$(x-n-1)(x-n+1) \geq (x+n-1)$

$(x+n+1)$, si $n < 0$, entonces el conjunto solución es:

A) $[0, \infty)$ B) $\emptyset$ C) $\mathbb{R} - \{1\}$

D) $(1, 3]$ E) $(-n, 4]$

58. Si x_1, x_2 son raíces de la ecuación:

$(a^4-b^4)x^2 + (b^4-c^4)x = a^4 - c^4$,

$a \neq \pm b$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcule

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$

A) $a^2 + b^2 + c^2$ B) $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$

C) 1 D) 0

E) $ab + ac + bc$

59. Al resolver la ecuación:

$(x+a+b+2c)^{-1} - x^{-1} = (a+c)^{-1} + (b+c)^{-1}$

una de las raíces es:

A) $2a - c$ B) $2c - a^2$

C) $a + c$ D) $-b - c$

E) $a - b + c$

60. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación: $3x^2 + px + 4 = 0$. Determine un valor de "p" de

modo que: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \frac{1}{9}$

A) 4 B) -4 C) 2i

D) 3i E) 4i

61. Si x_1 y x_2 son las raíces de $x^2 - x + 12 = 0$, determine

$E = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$

A) 1/2 B) 5/3 C) 3/2

D) -1 E) 0

62. En cuánto hay que disminuir las raíces de la ecuación:

$(a^2-b^2)x^2 + 2(a+b)x + (a-b) = 0$; para que sean simétricas

A) $a - b$ B) $\frac{1}{a-b}$ C) $b - a$

D) $\frac{1}{b-a}$ E) $\frac{1}{b+a}$

63. Determine el valor positivo de "a" de modo que una de las raíces de la ecuación en "x"

$x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$, sea el cuadrado de la otra.

A) $-\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

64. Determine el valor de k para que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2 - 13x + k = 0$; sea 69.

A) 25 B) 30 C) 40

D) 35 E) 50

65. Si $\{a; b\}$ es el conjunto solución de la ecuación $cx^2 + dx + cd = 0$, además $\{c; d\}$ es el conjunto solución de: $ax^2 + bx + ab = 0$. Calcule $T = abcd$ si $T \neq 0$.
 A) 1 B) $\frac{1}{4}$ C) -4
 D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$
66. Determine la suma de sus raíces de la ecuación $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$, sabiendo que la suma de sus cuadrados es el mínimo valor posible.
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5
67. ¿Para qué valor o valores del parámetro "m", el trinomio $P(x) = x^2 - 4x + m^2 - m + 5$; acepta como mínimo valor al número 3?
 A) 1; 2 B) -1; 2 C) 1; -2
 D) 3; -2 E) 2; -3
68. Determine la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación. $(2k+2)x^2 + (4-4k)x + k - 2 = 0$, sabiendo que las raíces son recíprocas.
 A) $\frac{62}{9}$ B) $\frac{84}{9}$ C) $\frac{78}{9}$
 D) $\frac{75}{9}$ E) $\frac{65}{9}$
69. Calcule el mínimo valor de "a", para el cual una de las raíces de la ecuación $ax^2 - (a^2+1)x + a = 0$, es el cuádruplo de la otra raíz.
 A) 1 B) $-\frac{1}{2}$ C) -2
 D) 2 E) $\frac{1}{2}$
70. Si las raíces de la ecuación: $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{k+1}{k-1}$; son simétricas, determine "k".
 A) $\frac{2a}{a+b}$ B) $\frac{2b}{a-b}$ C) $\frac{b-a}{a+b}$
 D) $\frac{a+b}{a-b}$ E) 1
71. Determine "m" de modo que las raíces simples o dobles de la ecuación cuadrática en x: $mx^2 + x = 2mx + 3m + 3$ Estén comprendidas en el intervalo: $\left[-1\frac{1}{2}; 3\right]$
 A) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup (2; +\infty)$
 B) $\left(-\infty; -2\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$
 C) $\left(-\frac{1}{4}; 2\right)$
 D) $\left(-\infty; -3\right] \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$
 E) $\left(-\infty; 1\right) \cup (3; \infty)$
72. Entre qué límites debe estar comprendido "n" para que la Inecuación: $x^2 + 2nx + n > \frac{3}{16}$, se verifique para todo valor real de "x".
 A) $4 < n < 5$
 B) $\frac{1}{4} < n < \frac{1}{2}$
 C) $\frac{1}{4} < n < \frac{3}{4}$
 D) $\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4}$
 E) $-\frac{1}{4} < n < \frac{3}{4}$
73. Determine $m > 0$ tal que la recta $y = mx - 3$ sea tangente a la parábola $y = 3x^2$.
 A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

74. Dada la ecuación en "x":

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{x-c}, \quad a > b,$$

indique la condición que se debe cumplir para que tenga dos raíces reales diferentes.

- A) $c < a < c > b$
 B) $c > a < c < b$

C) $c > \frac{a+b}{2}$

D) $c < \frac{a-b}{2}$

E) $c < \frac{a+b}{2}$

75. La ecuación bicuadrada:

$x^4 - (p + 2)x^2 + 4 = 0$, tiene las raíces de la ecuación: $x^2 + px + q = 0$. Entonces, los valores de p y q son:

- A) 3 y 2 B) 3 y -2
 C) -2 y 3 D) -2 y -3
 E) 2 y -3

76. Si $a_1 = m + 2$; $a_2 = m - 1$; $a_3 = 2 - m$ son los coeficientes de la ecuación $a_1x^4 + a_2x^2 + a_3 = 0$ tal que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, entonces determine el valor de la mayor raíz.

- A) 10 B) 15

C) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{6}}{5}}$ D) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{6}}{2}}$

E) $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{6}}{5}}$

77. En relación a la ecuación bicuadrada:

$$(13-k)x^4 + \left(\frac{k}{4}-3\right)x^3 + \left(\frac{k}{q}-5\right)x^2$$

$+ \left(\frac{k-q}{5}-2\right)x - k = 0$, indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. El valor de q es 2

II. $k + q = 14$

III. $x^4 + 2x^2 - 12 = 0$

IV. Una raíz es $-\sqrt{3}$

- A) FFWV B) VVFF
 C) VFFV D) VVVF
 E) VVVV

78. Resolver la ecuación:

$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 7x^4 + 35x^2 - 10$
 indique la diferencia entre la mayor y menor de las raíces obtenidas.

- A) 2 B) 4 C) 6
 D) 8 E) 10

79. Construir una ecuación bicuadrada en la que la suma de los cuadrados de sus raíces es 35 y el producto 70.

- A) $2x^4 + 35x^2 + 140 = 0$
 B) $2x^4 - 35x^2 + 70 = 0$
 C) $2x^4 + 70x^2 + 140 = 0$
 D) $2x^4 - 35x^2 + 140 = 0$
 E) $2x^4 - 70x^2 - 140 = 0$

80. Dada la ecuación bicuadrada $mx^4 + nx^2 + 36 = 0$ de raíces 3; $(n+15)$. Calcule el menor valor que toma n.

- A) 17 B) -16,7 C) 15
 D) -4,3 E) -13

81. Resolver la ecuación bicuadrada $(5n^2+2)x^4 - (4n^2+9)x^2 + 3(n^2+2) = 0$ si el producto de sus raíces es igual a 1. Dar como respuesta la raíz de mayor valor absoluto.

- A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$
 D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\sqrt{3}$

82. Encuentre el valor de k si la ecuación:

$x^4 - (3k-2)x^2 + (k-1)^2 = 0$, si dos de sus raíces negativas distintas suman -8 .

- A) 8 B) -18 C) 9
D) 11 E) 7

83. Si

$$E = \{x \in \mathbb{R} / 70x^2 - 30\sqrt{2}x - 30\sqrt{2} \cdot x^3 + 8x^4 + 8 = 0\}$$

Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I $\exists x \in E / \sqrt{2} \cdot x = 1$

II E tiene 2 elementos racionales y 2 complejos.

III. $\{1, 3\sqrt{2}\} \subset E$

V. E tiene 4 elementos racionales.

- A) VVVV B) FFFF C) VVFF
D) VFFF E) VVFF

84. Resolver:

$$(x-7)(x-5)(x-3)(x-9) = 9 \text{ y dar el valor de verdad de:}$$

I. El menor valor que la satisface es $6 - \sqrt{5}$

II. El mayor valor que la satisface es $6 + \sqrt{10}$

III. La suma de todas sus raíces es 12.

IV. Si S es el conjunto solución entonces $\{6 + \sqrt{10}; 6\} \subset S$

- A) FFFF B) VVFF C) FVVV
D) FVVV E) FVFF

85. Al resolver la ecuación:

$$6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$$

Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. Las raíces son recíprocas.

II. Las raíces no son recíprocas.

III. Dos de sus raíces suman $5/2$.

IV. Todas sus raíces son reales

- A) FVVV B) FVFF C) VVFF
D) VVFF E) FFFF

86. Si $y = x + \frac{1}{x}$, entonces la ecuación: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$, se transforma en:

- A) $y^2 - 2y + 6 = 0$
B) $y^2 - y - 6 = 0$
C) $x^2(y^2 + 2y + 6) = 0$
D) $x^2(y^2 + y - 6) = 0$
E) $x^2(y^2 - y + 6) = 0$

87. Determine la menor raíz de la ecuación: $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 3x + 2 = 0$

- A) $\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}$ B) $\frac{-7 - \sqrt{33}}{4}$
C) $\frac{-7 - \sqrt{34}}{4}$ D) $\frac{7 + \sqrt{34}}{4}$
E) $\frac{7 + \sqrt{35}}{4}$

88. Resolver: $1 + \frac{24 - 4x}{x^2 - 2x - 15} > 0$

- A) $(-\infty; -3) \cup (5; \infty)$
B) $(-3; 5)$
C) $(-\infty; 5) - \{3\}$
D) $(-\infty; 3) \cup (5; \infty)$
E) $(-\infty; 5) \cup \{3\}$

89. Resolver: $\frac{x-2}{x+2} < \frac{x^2}{x^2+2}$

- A) $(-2; 1)$ B) $(-2; \infty)$
C) $(-\infty; -2)$ D) $(2; \infty)$
E) $(-1; \infty)$

90. Determine el intervalo en el cual debe estar comprendido el valor de n para que la inecuación:

$$\frac{3(2n+1)x^2 - 2(4n+5)x + 5n+9}{5x^2 - 6x + 5} < n+2$$

se verifique para todo valor de x .

- A) $\emptyset$ B) $(-2; 3)$ C) $(0; 4)$
D) $(-\infty; 7)$ E) R

91. ¿Cuántos enteros positivos no verifican la inecuación:

$$\frac{2x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2} \geq \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 3}$$

- A) ninguno B) 1 C) 2
D) 3 E) más de 3

92. Al resolver la inecuación:

$$\frac{(x-2)^a(x-3)^b}{(x-4)^c} \geq 0, \text{ se obtuvo}$$

como conjunto solución:

$CS = (-\infty; 2] \cup \{3\} \cup (4; \infty)$. Si $0 < c < b < a$; calcule el mínimo valor de $T = a + b + c$.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

93. Resolver $\frac{(x-1)^{30}(x+2)^3}{(x^2+x+2)(x-5)} > 0$ si

la solución es $S = (\mathbb{R} - \{a; b\}) \cup \{1\}$, dar el valor de $T = b - a$.

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

94. Resolver la ecuación

$$2\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{x(a+x)} \text{ y dar una solución}$$

- A) a B) $\frac{64a}{1025}$ C) $\frac{1024a}{1025}$
D) $\frac{32a}{1024}$ E) $\frac{128a}{1025}$

95. Al resolver la ecuación irracional:

$$\sqrt{m-1} + \sqrt{2m-3} + \sqrt{m+3} + 3\sqrt{2m-3} = 7\sqrt{2}$$

se obtuvo $m = \frac{ab}{10}$; a y b numerales. Calcule $T = (a+b)^2$.

- A) 9 B) 16 C) 25
D) 36 E) 49

96. En relación al conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / (x+6)^{5/6} + x^2 = x(x+6)^{1/2} + x(x+6)\}$$

Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

- I. $S = \{ \}$
II. $n(S) = 3$
III. Si $S = \{a; b\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$
IV. $S \subset \{3; 8\}$

- A) FFVV B) FFFV C) FFVF
D) VVFF E) FVFF

97. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x^2 - 16x + 24} + \sqrt{3x^2 - 16x - 3} = 9$$

Calcule la suma de sus raíces.

- A) 7 B) $\frac{11}{3}$ C) $\frac{7}{13}$
D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{16}{3}$

98. Si x_1 y x_2 son dos soluciones de la ecuación:

$$\sqrt[3]{0,5x - 0,2} + \sqrt[3]{0,2x - 0,5} = \sqrt[3]{2,8(x-1)}$$

Determine el valor de:

$$R = \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} + \frac{x_2 + 2}{x_1 + 2}$$

- A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{10}{3}$
D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{17}{4}$

99. Encontrar la incógnita "x" de la siguiente ecuación:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

- A) $\frac{(2a-b)^3 + 27a^2b}{27b}$

B) $\frac{(2a+b)^3 + 9ab}{27b}$

C) $\frac{(2a+b)^3}{27b}$

D) $\frac{27a}{b}$

E) $a + b$

100. Resolver:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 6 - \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}$$

indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Tiene un solución racional

II. Tiene 2 soluciones (una racional y una irracional)

III. La suma de las raíces es 4

A) VFF B) FVV

C) VVV D) FFF

E) VVF

101. Si S es el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x-1}} = \sqrt[3]{4x} \text{ . Entonces, la}$$

suma de los elementos de S es:

A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{11}{5}$ E) $\frac{16}{5}$

102. Determine el conjunto de solución de la ecuación:

$$\frac{2x(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1}{2x(x - \sqrt{x^2 - 1}) - 1} = \frac{m^5}{243} (x - \sqrt{x^2 - 1});$$

si $m > 0$

A) $\frac{m^2 + 9}{6m}$ B) $\frac{m^2 + 6}{m}$

C) $\frac{m+1}{m}$ D) $\frac{m^2 + 1}{6m}$

E) $\frac{m^2 + 3}{4m}$

103. Determine $T = a + b$ del conjunto A definido por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x} \right\} = \left[a; \frac{b}{\sqrt{3}} \right)$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

104. Si $(a - 1)^n = a(a + 1)^{n-1}$.

Calcule x en:

$$\frac{\sqrt[n]{ax+1} + \sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{ax+1} - \sqrt[n]{ax}} = a$$

A) a

B) a^n

C) a^{-n}

D) 1

E) $\frac{a}{n}$

105. Resolver: $x < \sqrt{1-2x}$ si la solución es $S = (-\infty; a)$. Dar el valor de $T = (a+1)^2$.

A) 2

B) 4

C) 9

D) 16

E) 81

106. Al resolver:

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3, \text{ se obtiene:}$$

$x \in \langle a + b\sqrt{c}; \infty \rangle$ si $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, calcule el valor de $M = a + b + c$.

A) 73

B) 186

C) 173

D) 176

E) 178

107. Resolver la inecuación:

$$\sqrt[3]{x^3 - 7} < x - 1$$

A) (1; 2)

B) (0; 3)

C) (-2; 2)

D) (-1; 2)

E) (-1; 4)

108. Resolver:

$$\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5x - 6} < x - 2$$

A) (3; 6)

B) $(-\infty; 1/3) \cup (2; \infty)$

C) $(-\infty; 1/3)$

D) (1/3; 2)

E) $\emptyset$

109. ¿Cuántos números enteros verifica la siguiente inecuación:

$$\sqrt{1-x^2} < 2x-1$$

- A) ninguno B) 1 C) 2
D) 3 E) mas de 3

110. Resolver:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-3x} < \sqrt{x} + 4$$

Indique el conjunto solución

- A) $\mathbb{R}^-$ B) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$
C) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ D) $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ E) $\mathbb{R}^+$

111. Resolver:

$$\sqrt{\frac{x^2-6x-\sqrt{x}}{8-x}} \geq \sqrt[3]{x-10}$$

Entonces el conjunto solución es:

- A) $[7; 8) \cup \{0\}$
B) $[-3; 0)$
C) $[-3; -2) \cup \{0\}$
D) $\emptyset$
E) $\mathbb{R}^+$

112. Resolver la inecuación

$$\frac{(x^4+x^2+1)(x-3)^7 \sqrt[5]{x-1}}{10\sqrt{x+3} \sqrt[3]{x+8}(x-7)^{11}} \leq 0$$

- A) $(-8; 1] \cup [3; 6) - \{-3\}$
B) $(-8; 1] \cup [3; 7) - \{-3\}$
C) $(-8; 1]$
D) $(-3; 1] \cup [3; 7)$
E) $\mathbb{R}$

113. Determine el conjunto solución de la inecuación irracional.

$$\sqrt{2+\sqrt{x-5}} < \sqrt{13-x}$$

- A) $[5; 9)$ B) $[5; 8)$
C) $[4; 10)$ D) $[1; 3)$
E) $[0; 6)$

114. Al resolver la inecuación irracional:

$$\frac{\sqrt[4]{4-x} + \sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x}-2} \geq \sqrt[3]{1-x}-1, \text{ se}$$

obtiene como CS = $\{a; b\}$
Calcule: $T = a^2 + b^2$

- A) 5 B) 10 C) 13
D) 17 E) 20

115. Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{4x^2 + \sqrt{9-x^2}-1}{4x^2-1} \geq 1 \text{ indique el}$$

valor de verdad de las proposiciones siguientes:

- I. $S = \emptyset$ II. $S \cap (0; 1/2) \neq \emptyset$
III. $S = \{1/2; 3\}$
A) VVV B) FFF C) VFF
D) FVV E) FVF

116. Resolver $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1} \geq x-4$, si el conjunto solución es $S = [a; b]$, calcule el valor de $T = (a+b)^{5-b+2}$

- A) 0 B) 1 C) 4
D) 9 E) Indeterminado

117. Sea el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2-x-2} > 1\}$$

entonces el conjunto por extensión es:

- A) $(1; \infty)$ B) $[2; \infty)$ C) $[2; 3]$
D) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$ E) $[1; \infty)$

SOLUCIONARIO

2º SEMINARIO - TALLER

ALGEBRA

① NO OLVIDE: LA RELACIÓN ENTRE ELEMENTO Y CONJUNTO ES MEDIANTE EL SÍMBOLO $\in$, Y ENTRE CONJUNTO Y CONJUNTO ES MEDIANTE EL SÍMBOLO $\subset$.
CON ESTO:

(I) es V ; (II) es V ; (III) es F

$\therefore$ I y II son CORRECTAS

② RECUÉRDASE QUE: EL CONJUNTO POTENCIA DE A DENOTADO POR $P(A)$ ES EL CONJUNTO QUE ESTÁ FORMADO POR TODOS LOS SUBCONJUNTOS POSIBLES QUE SE PUEDE FORMAR CON LOS ELEMENTOS DE A.

CON ESTO: (I) es V ; (II) es V ;

(III) es F ; (IV) es V ; (V) es V ; (VI) es F

$\therefore$ 4 PROPOSICIONES SON CORRECTAS

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{Ej: } F &= [A^c \cap (B - C)^c]^c \cup (B \Delta C) \\ &= [A \cup (B - C)^c] \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c] \\ &= [A \cup (B \cap C)] \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c] \\ &= A \cup \{(B \cap C) \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c]\} \end{aligned}$$

APLICAMOS ASORCIÓN

$$\begin{aligned} &= A \cup [(B \cap C) \cup (B \cup C)] \\ &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

$$\therefore F = (A \cup B) \cup C$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \phi(A \cap B)^c \cap (A^c \cup B) &? \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \\ &= A^c \cup (B^c \cap B) = A^c \cup \phi = A^c \\ &\Rightarrow \text{(I) es V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} (A \cap B) \cup (A \cup B)^c &? \\ &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cup A^c) \cap B \\ &= U \cap B = B \quad \Rightarrow \text{(II) es V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} (A - B) \cup (B^c - A^c) &? \\ &= (A \cap B^c) \cup (B^c \cap A) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B^c) = A \cap B^c \\ &= A - B \quad \Rightarrow \text{(III) es V} \\ &\therefore \text{VVV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \text{Dato: } E \subset A &\Rightarrow A \cap E = E \\ \text{Ej: } M &= [A - (B - E)] \cup [(A - B)^c \cap E^c] \\ &= [A - (B \cap E^c)] \cup [(A - B) \cup E]^c \\ &= [A \cap (B \cap E^c)^c] \cup [(A \cap B^c) \cup E]^c \\ &= [A \cap (B^c \cup E)] \cup [(A \cap B^c) \cup E]^c \\ &= [(A \cap B^c) \cup (A \cap E)] \cup [(A \cap B^c) \cup E]^c \\ &= [(A \cap B^c) \cup E] \cup [(A \cap B^c) \cup E]^c \\ &\therefore M = U \end{aligned}$$

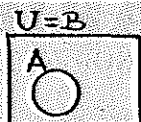
$$\begin{aligned} \textcircled{6} \textcircled{4} (A - B)^c \cup A &? \\ &= (A^c \cup B)^c \cup A = (A^c \cup A) \cup B \\ &= U \cup B = U \\ &\Rightarrow \text{(I) es F} \end{aligned}$$

(*)

GRAFIQUEMOS

$$A^c \subset (A \cup B) \rightarrow$$

$$\text{DE AQUÍ: } B^c = \phi \Rightarrow B^c \subset A \rightarrow (\text{III}) \text{ S V}$$



$$(\text{++}) \text{ Si } A = \{\phi; \{\phi\}\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \{\phi; \{\phi\}; \{\{\phi\}\}; \{\phi; \{\phi\}\}\}$$

$$\text{OJ: } \phi \in P(A) \rightarrow (\text{III}) \text{ S V} \\ \therefore FVV$$

$$(7) \text{ DATO: } A \cap C = \phi$$

$$\text{SEA } E = \{(A \cup B) \cap A\} \cup C\} \cap B$$

$$= \{(A \cap A) \cup (B \cap A) \cup C\} \cap B$$

$$= \{(B \cap A) \cup C\} \cap B$$

$$= \{(B \cup C) \cap (A \cup C)\} \cap B$$

$$= \{(B \cup C) \cap C\} \cap B$$

$$\text{POR ABSORCIÓN} \\ = C \cap B = B \cap C$$

$$(8) \text{ SEA: } T = [(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C)] \cap (A \cap C) \cap B$$

$$= [(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C) \cap (A \cap C)] \cap B$$

$$= [(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C) \cap (A^c \cup C)] \cap B$$

$$= [(A \cup (B^c \cap C)] \cap (C \cap B) \cap B$$

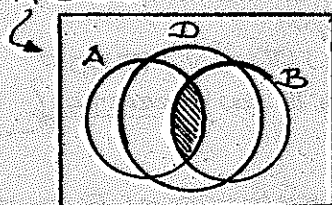
$$= [A^c \cup (B^c \cap C)] \cap (C \cap B) \cap B^c$$

$$= [A^c \cup (B^c \cap C)] \cap C \cap (B \cap B^c)$$

$$\therefore T = [\quad] \cap C \cap \phi = \phi$$

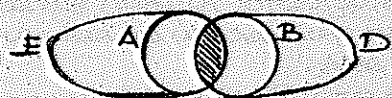
(9) RESOLVAMOS GRÁFICAMENTE:

$$(H) A \cap B \subset D$$



$$\text{OJ: } A^c \neq D^c ; B^c \neq D^c \rightarrow (\text{I}) \text{ S F}$$

$$(\text{++}) (A \cap B) \subset (D \cup E)$$



$$\text{OJ: } A \neq D ; B \subset E \rightarrow (\text{III}) \text{ S F}$$

$$(\text{++}) A \subset (D \cup E) \wedge B \subset (D \cup E)$$

$$\text{PERO } (D \cap E) \subset (D \cup E)$$

$$\rightarrow A \subset (D \cup E) \wedge B \subset (D \cup E)$$

$$\rightarrow (A \cup B) \subset (D \cup E) \rightarrow (\text{III}) \text{ S V}$$

$$\therefore FVV$$

$$(10) \text{ SEA } E = (A \cap B) \cup (C \cap B \cap A) \cup [(A \cap C) \cup (B^c \cup D^c)]^c$$

$$= (A \cap B) \cup [(A \cap C) \cap (B \cap D)]$$

$$= (A \cap B) \cup [(A \cap B) \cap (C \cap D)]$$

$$\text{APLICANDO ABSORCIÓN}$$

$$\therefore E = A \cap B$$

$$\begin{aligned}
 (11) \text{Ea } M &= \{[(A \cap B)^c \cap (A^c \cup B)]^c \cap \\
 &\quad \cup (A - B) \cup (B^c - A^c)\} \Delta A \\
 &= \{[(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup B)]^c \cup (A \cap B^c) \cap \\
 &\quad \cup (B^c \cap A)\} \Delta A \\
 &= \{[\underbrace{A^c \cup (B^c \cap B)}_{\phi}]^c \cup \underbrace{(A \cap B^c) \cup (A \cap B^c)}_{\Delta A}\} \\
 &= \{A^c\}^c \cup (A \cap B^c) \} \Delta A \\
 &= \{A \cup (A \cap B^c)\} \Delta A = A \Delta A = \phi
 \end{aligned}$$

Por absorción

$$\begin{aligned}
 (12) \text{a) } \text{E } x \in B \text{ que } A \cap B^c &= A - B \\
 \text{O } \text{Ea } \text{que:} \\
 \text{Si } A \cap B^c &= \phi \Rightarrow A - B = \phi \\
 &\quad \Downarrow (I) \text{ es F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \text{De } C &= (A - B) \cap B \\
 &= A \cap B^c \cap B \\
 &\quad \phi \rightarrow C = \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego:} \\
 ((B - A) \cup C) \cup A &= (B \cap A^c) \cup \phi \cup A \\
 &= (B \cap A^c) \cup A \\
 &\quad \text{Por absorción} \\
 &= A \cup B \quad \Downarrow (II) \text{ es V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \text{De } A: \exists x \in \mathbb{Z} / x^2 + 1 &= 0 \\
 &\quad \Downarrow A = \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{De } B: \exists x \in \mathbb{R} / x - x &= 1 \\
 &\quad \Downarrow B = \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego:} \\
 A^c \cap B^c &= U \cap U = U \quad \Downarrow (III) \text{ es V}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{FVV} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 (13) \text{Dato: } A \cap C &= E \\
 \text{Ea } P &= [(A - B) - C^c] \cap (E - B)^c \\
 &= (A \cap B^c \cap C^c) \cap (E - B)^c \\
 &= (E \cap B^c) \cap (E - B)^c \\
 &= (E - B) \cap (E - B)^c = \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \text{a) } (A \cap B) \cap (A \cup B) &\supset \\
 &= [(A \cap B) \cap A] \cup [(A \cap B) \cap B] \\
 &= (A \cap B) \cup (A \cap B) \\
 &= A \cap B \quad \Downarrow (I) \text{ es V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (A - B) \cap C^c &= A \cap B^c \cap C^c \\
 &= A \cap (B \cup C)^c \\
 &= A - (B \cup C) \\
 &\quad \Downarrow (II) \text{ es V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \text{Por lo anterior} \\
 A - (B \cup C) &= (A - B) \cap C^c \quad \Downarrow (III) \text{ es F}
 \end{aligned}$$

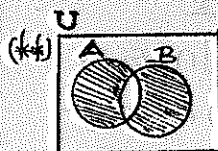
$$\begin{aligned}
 \text{d) } A \cap [B - (B - C)] &\supset \\
 &= A \cap [B \cap (B - C)^c] \\
 &= A \cap [B \cap (B^c \cup C)] \\
 &\quad \text{Por absorción} \\
 &= A \cap (B \cap C) \quad \Downarrow (IV) \text{ es F} \\
 &\therefore \text{VVF} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (15) \text{Requiere de la Definición:} \\
 x \in P(A) \iff x \subset A \quad (I)
 \end{aligned}$$

(*) Si $A, B \subset U \Rightarrow (A-B) \subset U$

Por (I): $(A-B) \in P(U)$

$\Rightarrow (I) \text{ es } V$



Obsérvese
 $A \Delta B \not\subset A$

Por (I):

$(A \Delta B) \notin P(A)$

$\Rightarrow (II) \text{ es } F$

(**) Supongamos que A y B son dis-juntos, donde:

$n(A) = a ; n(B) = b$

$\Rightarrow n(A \cup B) = a + b$

caso:

$n(P(A)) = 2^a ; n(P(B)) = 2^b$

y $n(P(A \cup B)) = 2^{a+b}$

Además:

$n[P(A) \cup P(B)] = 2^a + 2^b - 1$

El ϕ se repite

Obsérvese ϕ , la cantidad de ele-
mentos son diferentes, enton-
ces: $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$ $\Rightarrow (III) \text{ es } F$

$\therefore VFF$

(16) Si $A \subset B \rightarrow A \subset A \cup B$

Luego: Si $x \in P(A) \rightarrow x \subset A$

$\rightarrow x \subset (A \cup B) \rightarrow x \in P(A \cup B)$

Por definición de inclusión:

$P(A) \subset P(A \cup B) \Rightarrow (I) \text{ es } V$

(*) Reduzcamos, tenga presente:

$(A-B)-C = (A-C)-B$

$\phi[(A-B)-A]-B^c = [(A-A)-B]-B^c = \phi$

Sea que $\phi \in P(M) \Rightarrow (II) \text{ es } V$

(*) (III) es V

(*) $P[\{\phi\} - \{\phi\}] = \{\phi; \{\phi\}\} - \{\phi\}$

$= \{\{\phi\}\} \Rightarrow (III) \text{ es } V$

$\therefore VVV$

17 RECUERDE

Se cumple que:

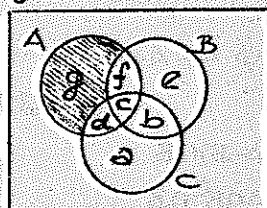
$n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

Reemplazando valores:

$12 = 27 - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cap B) = 15$

18 U



Obs: La parte sombreada represen-
ta $A - (B \cup C) \Rightarrow n(A - (B \cup C)) = g$

Dato: $n(A \cup B \cup C) = 56$

$\rightarrow a + b + c + d + e + f + g = 56 \quad (1)$

+ $n(C) = 26 \rightarrow a + b + c + d = 26 \quad (2)$

$\rightarrow e + f + g = 30$

+ $n(B-C) = 19 \rightarrow f + e = 19 \quad (3)$

$\cdot (2) \text{ y } (3) \text{ en } (1): 26 + 19 + g = 56$

$\therefore g = 11$

(19) Si $n(P(A)) = 32 \rightarrow n(A) = 5$

$$\therefore \text{Si } n(P(B)) = 128 \rightarrow n(B) = 7$$

$$\therefore \text{Si } n(P(A \cap B)) = 8 \rightarrow n(A \cap B) = 3$$

$$\text{AHORA: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\rightarrow n(A \cup B) = 5 + 7 - 3$$

$$\therefore n(A \cup B) = 9$$

LUEGO:

$$n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \Delta B) = 9 - 3 = 6$$

$$\therefore n(P(A \Delta B)) = 2^6 = 64$$

$$\textcircled{20} \cdot \text{Si } n(P(A \cup B)) = 32 \rightarrow n(A \cup B) = 5$$

$$\cdot \text{Si } n(P(A \cap B)) = 4 \rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$\cdot \text{Si } n(P(B - A)) = 4 \rightarrow n(B - A) = 2$$

AHORA, RECUERDE QUE:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

REEMPLAZANDO VALORES:

$$5 = n(A - B) + 2 + 2$$

$$\therefore n(A - B) = 1$$

$$\therefore n(P(A - B)) = 2^1 = 2$$

$\textcircled{21}$ - SEGÚN LOS DATOS:

$$\cdot n(U) = 2000$$

$$\cdot n(M \cap P \cap S) = 200$$

$$\cdot n(M \cap P \cap S^c) = n(M \cap P \cap S^c) = 150$$

$$\cdot n(M \cap P \cap S^c) = 450$$

$$\cdot n[M \cap (P \cup S)^c] = 250$$

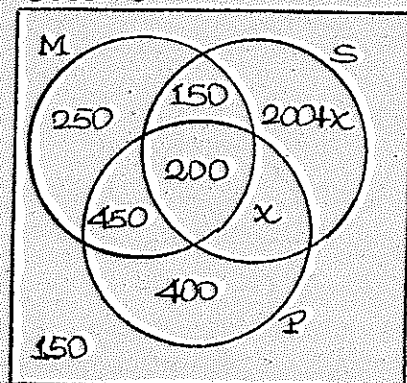
$$\cdot n(M) = 1050$$

$$\cdot n[(P \cap M) \cap (P \cap S)] = 400$$

$$\cdot n(P \cap S) = n[S \cap (M \cup P)^c] = x$$

HAGAMOS UN GRÁFICO CON ÉSTOS:
(LLENE EN ESE ORDEN)

$$U = 2000$$



DEL GRÁFICO:

$$1800 + 2x = 2000 \rightarrow x = 100$$

$$\text{DATO: } A * B = A^c \cup B^c$$

CON ESTO:

$$\cdot n[(M * P) \Delta (P * S)] = n[(M * P) \cup (P * S)] - n[(M * P) \cap (P * S)] \dots (I)$$

POR PARTES:

$$\begin{aligned} \cdot (M * P) \cup (P * S) &= (M^c \cup P^c) \cup (P^c \cup S^c) \\ &= M^c \cup P^c \cup S^c \\ &= (M \cap P \cap S)^c \end{aligned}$$

DEL GRÁFICO:

$$n[(M * P) \cup (P * S)] = 1800$$

$$\begin{aligned} \cdot (M * P) \cap (P * S) &= (M^c \cup P^c) \cap (P^c \cup S^c) \\ &= P^c \cup (M^c \cap S^c) \\ &= P^c \cup (M \cap S)^c \\ &= [P \cap (M \cup S)]^c \end{aligned}$$

DEL GRÁFICO:

$$n[(M * P) \cap (P * S)] = 1250$$

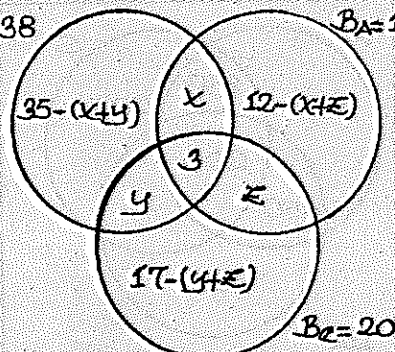
$$\text{LUEGO: } \text{LO PEDIDO ES: } 1800 - 1250$$

$$= 550$$

22) #TOTAL DE PERSONAS : 58

F=38

BA=15



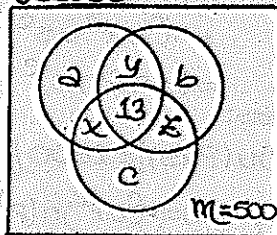
NOSE PIDEN: $x+y+z = ?$

Obs: #TOTAL DE PERSONAS = $(35 - (x+y)) + (x+y+z) + (12 - (x+z)) + z + (17 - (y+z))$

$$58 = 67 - (x+y+z)$$

$$\therefore x+y+z = 9$$

23) U=1000



NO SE ELIMINARON 987 CAMISAS

SE ELIMINARON 13 CAMISAS (TIEVEN 3 FALLAS)

LOS QUE NO SE VERDIERON A LA MITAD DE PRECIO SON LAS QUE TIEVEN SÓLO 1 FALLA O NINGUNA FALLA; ESTE TOTAL ES:

$$2+13+1500 = 875 \text{ (DATO)}$$

$$\therefore 2+13+c = 375$$

#DE CAMISAS CON UNA FALLA

24) $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

(*) PARA $x=2 \in M$, VEMOS QUE:

$$3x-5 = 1 \in M \quad \therefore (I) \text{ ES V}$$

(**) $x+y \leq 7$

- 1 NOTÉSE, CUANDO X TOMA
- 2 LOS VALORES INDICADOS,
- 3 SIEMPRE EXISTE UN Y $\in M$
- 4 QUE VERIFICA LA DESIGUAL-
- 5 DAD DADA. $\therefore (II) \text{ ES V}$

(***) $x+y = 7$

NOTÉSE, CUANDO $y=1 \in M$, NO EXISTE X $\in M$ QUE VERIFIQUE LA IGUALDAD DADA.

$\therefore (III) \text{ ES F}$

$\therefore \underline{VVF}$

(*) NOTÉSE CUANDO X e Y TOMAN SUS

MÍNIMOS VALORES (UNOS), SI $\exists$ UN Z QUE VERIFIQUE LA DESIGUALDAD, POR TANTO, PARA OTROS VALORES DE X e Y SUPERIORES A UNO TAMBIÉN SE VERIFICARÁ LA DESIGUALDAD.

$\therefore (I) \text{ ES V}$

(**) Obs: $x+y+z \geq 10$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 9 & 1 \end{matrix}$$

PARA LOS MÍNIMOS VALORES DE X, Y SE VERIFICA LA DESIGUALDAD, POR TANTO PARA TODOS LOS VALORES DE X, Y MAYORES QUE UNO, TAMBIÉN SE VERIFICARÁ LA DESIGUALDAD

$\therefore (II) \text{ ES V}$

(***) $\sim (\forall x \in A: \exists y \in A: x+y > 5)$

NO $\exists x \in A: \forall y \in A: x+y < 5$

Obs: Si $x=1$ y $y=7$ NO SE VERIFICA LA DESIGUALDAD $\therefore (III) \text{ ES F}$

$\therefore \underline{VVF}$

(26) Dato: $U = \{ \langle 6; 4 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle \}$

• $\in A$: $x < 2 \rightarrow x > 5$

$$\equiv \sim (x < 2) \vee (x > 5)$$

$$\equiv \underbrace{x > 2 \vee x > 5}_{x > 2}$$

Definir: $A = \{ x \in U / x > 2 \}$

Luego: $A = \{ 2; 4 \cup \langle 5; 7 \rangle \}$

De aquí, los $x \in A$ y enteros

Son: 2; 3 y 6.

$$\hookrightarrow B = \{ 3 - x / x = 2; 3; 6 \}$$

$$\rightarrow B = \{ 1; 0; -3 \}$$

$\therefore$ Prod. de Elementos: 0

(27) Analizamos cada proposición:

$$(*) \underbrace{(\exists x \in \mathbb{N} / x + 12 = 12)}_F \wedge \underbrace{(\forall x \in \mathbb{N} / x^2 > x)}_F$$

$$(N \text{ existe } x \in \mathbb{N}) \quad (x \in \mathbb{N} \text{ no cumple})$$

$$\hookrightarrow F \wedge F \equiv (F)$$

$$(\dagger) \underbrace{(\forall x \in \mathbb{Z} / -x < 0)}_F \vee \underbrace{(\exists x \in \mathbb{Z} / x = -x)}_V$$

$$(x = -1 \text{ no cumple}) \quad (x = 0 \text{ cumple})$$

$$\hookrightarrow F \vee V \equiv (V)$$

$$(\dagger\dagger) \underbrace{(\exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{-x} \in \mathbb{R})}_V \rightarrow \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} / x^2 < 0)}_F$$

$$(x = 0 \text{ cumple}) \quad (x = 2 \text{ no cumple})$$

$$\hookrightarrow V \rightarrow F \equiv (F)$$

$$\therefore F \vee F$$

(28) $A = \{ 0; 1; 2; 3; 4 \}$

(*) (I) $\exists f$. $\nexists x \in A$ que sumado

con 4 nos dé, 0.

(\dagger) (II) $\exists v$. Todo $x \in A$ satisface la desigualdad.

(\dagger\dagger) (III) $\exists v$. $x = 4 \in A$ satisface la igualdad.

(\dagger\dagger\dagger) (IV) $\exists v$. Todo $x \in A$ satisface la desigualdad.

$$\therefore F \vee V \vee V \vee F$$

(29) Falta precisar los cuantificadores para las variables correspondientes en cada función proposicional.

Así por ejemplo:

" p : $\exists x \in A / x + y + z = \text{par}$ "

debería de ser:

$$\exists x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A / (x + y + z)$$

$$\text{O } \exists x \in A, \forall y \in A, \exists z \in A / (x + y + z)$$

..... de tal manera que los expresiones señaladas no se pue

de precisar su valor de verdad.

(30) La negación de p es:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{Q} / x + y < 2 \rightarrow xy > 3)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q} : \sim (x + y < 2 \rightarrow xy > 3)$$

$$\rightarrow xy > 3)$$

$$\text{sea: } p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q} : \sim (x + y > 2 \vee xy > 3)$$

$$\vee xy > 3)$$

Finalmente:

$$\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Q} : x + y < 2 \wedge xy < 3$$

(31) LEY: $x > 4 \rightarrow x = 6$

$$\equiv \sim(x > 4) \vee (x = 6)$$

$$\equiv x \leq 4 \vee x = 6$$

OFERTA: $U = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x \leq 4 \vee x = 6\}$

$$\hookrightarrow U = \{1; 2; 3; 4; 6\}$$

CONTESTO: p ES V.; q ES F.

REEMPLAZANDO EN M ; SE TIENE:

$$M = \underbrace{(V \leftrightarrow V)}_V \leftrightarrow \underbrace{[(F \leftrightarrow F) \vee (F \rightarrow S)]}_V$$

$$V \leftrightarrow [X \vee V]$$

$$\therefore M = \underline{V}$$

(32) (I) LEY ASOCIATIVA (ES AXIOMA)

(II) NO ES AXIOMA

(III) LEY TRANSITIVA (ES AXIOMA)

(IV) NO ES AXIOMA

(V) LEY DE TRICOTOMÍA (ES AXIOMA)

$\therefore$ 3 SON AXIOMAS

(33) (*) $\text{Si } 2ab \leq 1 \rightarrow \frac{2ab}{2} \leq \frac{1}{2}$

SABEMOS QUE: $\underbrace{\sqrt{2b}}_{M \leq} \leq \underbrace{\frac{2ab}{2}}_{MA}$

ASÍ: $\sqrt{2b} \leq \frac{2ab}{2} \leq \frac{1}{2}$

POR TRANSITIVIDAD:

$$\sqrt{2b} \leq \frac{1}{2} \rightarrow 2b \leq \frac{1}{4} \quad \hookrightarrow \text{(I) ES V}$$

(**) (II) ES V

(***) SABEMOS QUE: $0 \leq (a-b)^2$

$$\rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$$

SUMO $(a+b)$: $2ab + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$

$$4ab \leq 2(a^2 + b^2)$$

DIVIDIDO POR 4: $\frac{(2ab)^2}{4} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{2}$

SACO $\sqrt{}$: $\frac{2ab}{2} \leq \sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{2}}$

$$\hookrightarrow \text{(III) ES V}$$

$$\therefore \underline{VVV}$$

(34) $a * b = a + b + 5$

(i) SEA $b = e$ EL ELEMENTO NEUTRO

$$\hookrightarrow a * e = a$$

$$a + e + 5 = a \rightarrow e = -5$$

(ii) SEA $b = e'$ EL ELEMENTO INVERSO DE 3.

$$\hookrightarrow 3 * e' = e$$

$$3 + e' + 5 = -5 \rightarrow e' = -13$$

$$\therefore e * e^{-1} = 65$$

(35) $a * b = 2a + 2b + 3 \dots (*)$

(i) $(2 * 3) * 5 = [2(2) + 2(3) + 3] * 5$

$$= 13 * 5$$

$$= 2(13) + 2(5) + 3$$

$$= (2 * 3) * 5 = 39 \quad \hookrightarrow \text{(I) ES V}$$

(ii) VEAMOS:

$$a * b = 2a + 2b + 3 \quad \text{SEA } S$$

$$y \quad b * a = 2b + 2a + 3$$

$$\text{OBS: } a * b = b * a \quad \hookrightarrow \text{(II) ES V}$$

COMUTATIVA

(...) LA OPERACIÓN SERÁ ASOCIATIVA, SI $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, SE CUMPLE:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

FW(x):

$$\begin{aligned} \cdot (x+y) * z &= 2(x+y) + 2z + 3 \\ &= 2[2x+2y+3] + 2z + 3 \\ &= 4x+4y+2z+9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot x * (y+z) &= 2x + 2(y+z) + 3 \\ &= 2x + 2(2y+2z+3) + 3 \\ &= 2x+4y+4z+9 \end{aligned}$$

Obs: $(x+y) * z \neq x * (y+z)$
 $\Rightarrow$ (III) EF

(....) FW(x): SEA $b = e$ EL ELEMENTO NEUTRO

$$\Rightarrow \underbrace{a * e} = a$$

$$2a + 2e + 3 = a \Rightarrow e = \frac{-(a+3)}{2}$$

$$\Rightarrow$$
 (IV) EF

$$\therefore \underline{VVFF}$$

(26) $\underline{a * b = 5ab}$; $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

SEA $b = e$ EL ELEMENTO NEUTRO

$$\Rightarrow \underline{a * e} = a$$

$$5ae = a \Rightarrow e = \frac{1}{5}$$

NOSE PUEDE EL INVERSO DE $\frac{1}{625}$

SEA e' EL INVERSO DE $\frac{1}{625}$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{625} * e'} = e$$

$$\leadsto 5 \left(\frac{1}{625} \right) (e') = \frac{1}{5}$$

$$\text{DE AQUÍ: } e' = \underline{625}$$

(37) (*) $\frac{1}{3}(-5)$ ES IDENTIDAD

ADITIVA $\Rightarrow \frac{1}{3}(-5) - 5 = 0 \rightarrow -5 = 15$

• $\frac{1}{5}(1b-8)$ ES IDENTIDAD MUL-

TIPlicativa $\Rightarrow \frac{1}{5}(1b-8) = 1 \rightarrow b = 15$

$$\therefore a+b=60 \Rightarrow$$
 (I) EV

(**) POR SER OPUESTOS DE LA ADICIÓN, SE CUMPLE:

$$(a-7) + (b-8) = 0 \rightarrow a+b=15$$

$$\Rightarrow$$
 (II) EV

(***) POR SER INVERSO DE LA MULTIPLICACIÓN, SE CUMPLE:

$$(a-4)(b-3) = 1$$

$$\Rightarrow ab - 4b - 3a + 12 = 1$$

$$\text{DE AQUÍ: } ab + 11 = 3a + 4b$$

$$\Rightarrow$$
 (III) EV

$$\therefore \underline{VVV}$$

(38) DATO: $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

SE SABE QUE: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

$$\text{DE AQUÍ: } a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\text{ADEMÁS: } b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$\text{TAMBIÉN: } c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

MULTIPLICANDO MIEMBRO A MIEMBRO:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

• JUNTAMOS abc :

$$(a+b)(b+c)(c+a) + abc > 9abc$$

CONOCIDO

$$(a+b+c)(a+b+c+c) > 9abc$$

• DIVIDO POR abc :

$$(a+b+c) \left[\frac{a+b+c}{abc} \right] > 9$$

• DESDORLANDO:

$$(a+b+c) \left[\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] > 9$$

$\Phi(12)$ ES V

(*) SE SABE QUE:

$$\frac{8a+27b+c}{3} > 3\sqrt{(8a)(27b)(c)}$$

POR DATO: $8a+27b+c=6$

$$\Rightarrow \frac{6}{3} > 3\sqrt{abc}$$

• AL CUBO: $abc \leq \frac{1}{27}$

$$\therefore abc_{\max} = \frac{1}{27}$$

$\Phi(12)$ ES F

(***) SE SABE QUE:

$$\frac{2a+\frac{1}{72}b}{2} \geq \sqrt{2a \cdot \frac{1}{72}b}$$

USANDO EL DATO:

$$\frac{5}{2} \geq \frac{1}{3} \sqrt{ab} \rightarrow \text{DE AQUÍ: } \sqrt{ab} \leq 15$$

$\Phi(13)$ ES V

$$\therefore \underline{\underline{VFV}}$$

(23) DATO: $c > b > a > 0$

$$+ b > a \rightarrow b^3 > a^3 \rightarrow a^3 - b^3 < 0 \dots (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} + b > a \rightarrow b-a > 0 \\ + c > 0 \rightarrow 3c > 0 \end{array} \right\} (*)$$

$$\text{OBT: } 3c(b-a) > 0 \rightarrow \frac{1}{3c(b-a)} > 0 \dots (2)$$

$$\text{DE (1) y (2): } \frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)} < 0$$

$$\text{O } 0 > \frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)} \dots (I)$$

PERO COMO $c > b > a > 0$

$$\rightarrow a+b+c > 0$$

$$\text{FEN (I): } a+b+c > 0 > \frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)}$$

POR TRANSITIVIDAD:

$$a+b+c > \frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)}$$

IDENTIFICANDO, SE TIENE:

$$\text{MEJOR VALOR DE P ES: } \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

40 (*) SABEMOS QUE: $(a-b)^2 > 0$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{DE AQUÍ: } a^2 + b^2 > 2ab$$

$$\text{SIMILAR: } b^2 + c^2 > 2bc \quad (+)$$

$$c^2 + a^2 > 2ca$$

$$\text{SUMANDO: } 2(a^2 + b^2 + c^2) > 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{DONDE: } a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow (I) \text{ ES V}$$

(**) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, SI $a < b \wedge b < c$

$$\rightarrow a < c \text{ (LEY TRANSITIVA)}$$

ES AXIOMA DEL SISTEMA $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (II) \text{ ES V}$$

(**) NO ES CIERTO QUE $\forall a \in \mathbb{R}^+$

SE VERIFIQUE QUE $\sqrt{a} \leq a$

POR EJEMPLO:

$$\text{SI } a = \frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} > \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow (III) \text{ ES F}$$

$$\therefore \underline{\text{VVFF}}$$

41 (*) NO ES CIERTO QUE $\forall a, b \in \mathbb{R}$

SE VERIFIQUE QUE $a^{-1} = b^{-1}$

¿POR QUÉ? PORQUE SI TENEMOS

0^{-1} , ESTO NO ESTÁ DEFINIDO

$$\Leftrightarrow (P) \text{ ES F}$$

(**) SI EXISTE $a, b \in \mathbb{R}$ QUE VERIFIQUE LA IGUALDAD DADA. POR

EJEMPLO, SI $a = 2 \wedge b = 1$, SE

$$\text{TIENE: } \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \quad \Leftrightarrow (Q) \text{ ES V}$$

(**) PARA $a = 0 \in \mathbb{R}$, SE TIENE:

$0^0 = x$ ¡ES UNA INDETERMINACIÓN!

$$\Leftrightarrow (R) \text{ ES F}$$

(***) SI $b = 0$ y $a = -2$, VEMOS QUE $a^b = (-2)^0$ EXISTE, PERO $b^a = 0^{-2}$ NO EXISTE

$$\Leftrightarrow (S) \text{ ES F}$$

$$\therefore \underline{\text{FVFF}}$$

42 DATO: $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^-$

$$(+) \quad \left(\frac{1}{b}\right) < \left(\frac{1}{a}\right) \quad \Leftrightarrow (I) \text{ ES V}$$

$$\text{ES } (-) \quad \text{ES } (+)$$

(**) $b(b-a) > 0$

$$\text{ES } (-) \quad \text{ES } (-)$$

$$\text{ES } (+) \quad \Leftrightarrow (II) \text{ ES V}$$

$$(**) \quad \left(\frac{b}{a}\right) - \left(\frac{a}{b}\right) < 0$$

$$\text{ES } (-) \quad \text{ES } (+)$$

$$\text{ES } (-) \quad \Leftrightarrow (III) \text{ ES V}$$

(***) $a < b \rightarrow a \cdot b < 0$

$$\rightarrow (ab)(a-b) < 0$$

NO ES VERDAD $\rightarrow \text{ES } (+) \quad \Leftrightarrow (IV) \text{ ES F}$

SU SIGNO

$$\therefore \underline{\text{VVVF}}$$

43 SABEMOS QUE: $0 \leq (a-b)^2$

$$\rightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$\rightarrow ab \leq a^2 - ab + b^2$$

COMO $a > 0$ y $b > 0$

MULTIPLICAMOS POR (ab) :

$$ab(ab) \leq (a^2 - ab + b^2)(ab)$$

$$\rightarrow 2b(2+b) \leq a^2+b^3$$

$$\cdot \text{Por } 3: 3 \cdot 2b(2+b) \leq 3(a^2+b^3)$$

$$\cdot \text{SUMO } a^2+b^3:$$

$$\frac{a^2+b^3+3 \cdot 2b(2+b)}{(2+b)^3} \leq \frac{4(a^2+b^3)}{(2+b)^3}$$

$$(2+b)^3 \leq 4(a^2+b^3)$$

$$\text{DE AQUÍ: } \frac{(2+b)^3}{a^2+b^3} \leq 4$$

$$\therefore \text{MEJOR } K: \frac{4}{x}$$

44) DE S, SE TIENE:

$$\frac{5x-6}{(5x+2)(5x-2)} + \frac{5x-18}{6x(2-5x)} + \frac{1}{6x} = \frac{4x-5}{4x(5x+2)}$$

CAMBIANDO DE SIGNO:

$$\frac{5x-6}{(5x+2)(5x-2)} - \frac{5x-18}{6x(5x-2)} + \frac{1}{6x} = \frac{4x-5}{4x(5x+2)}$$

• MULTIPLICAMOS POR $(2x(5x+2)(5x-2))$

$$12x(5x-6) - 2(5x+2)(5x-18) + 2(5x+2)(5x-2) = 3(5x-2)(4x-5)$$

$$60x^2 - 72x - 50x^2 + 90x + 160x - 72 = 60x^2 - 90x + 30$$

$$18x^2 - 8 = 60x^2 - 90x + 30$$

$$\text{DE AQUÍ: } 18x = -34$$

$$\therefore x = \frac{-2}{11} \quad \therefore \text{C.S.} = \left\{ \frac{-2}{11} \right\}$$

45) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\frac{(x-2-1)+1}{x-2-1} - \frac{(x-2-2)+1}{x-2-2} - \frac{(x-1-1)+1}{x-1-1} = \frac{(x-2-2)+1}{x-2-2} - \frac{(x-1-1)+1}{x-1-1}$$

DESDOBLANDO:

$$\sqrt{x-2-1} - \sqrt{x-2-2} = \sqrt{x-1-1} - \sqrt{x-2-2}$$

EFFECTUANDO:

$$\frac{-1}{(x-2-1)(x-2-2)} = \frac{-1}{(x-1-1)(x-2-2)}$$

DE AQUÍ:

$$(x-2-1)(x-2-2) = (x-1-1)(x-2-2)$$

$$(x-2)^2 - 3(x-2) + 2 = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2$$

$$x^2 - 2x + 2 - 3x + 6 = x^2 - 2x + 1 - 3x + 3$$

$$= -3x + 3b$$

$$x^2 + 3a - b^2 - 3b = 2ax - 2bx$$

$$(2b)(2b) + 3(2b) = 2x(2-b)$$

$$\text{DE AQUÍ: } x = \frac{2b+3}{2}$$

46) EFECTUANDO:

$$\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{x+b}}{(\sqrt{x-b})(\sqrt{x+b})}$$

$$\frac{-2a}{x-a^2} = \frac{2b}{x-b^2}$$

$$\rightarrow -2x + 2b^2 = bx - 2b$$

$$2b^2 + 2b = 2x + bx$$

$$2b(b+2) = x(2+b) \therefore x = \frac{2b}{2+b}$$

47) RESTAMOS 2 A CADA MIEMBRO

PERO DESCOMPLETO ASI:

$$\frac{2+x}{1+2b} - 1 + \frac{b+x}{1+b+2b} - 1$$

$$= \frac{x-2}{1-2+2b} + \frac{x-b}{1-b+2b} - 1$$

EFFECTUANDO, NOS QUEDA:

$$\frac{x-1-2b}{1+2+2b} + \frac{x-1-2b}{1+b+2b} = \frac{x-1-2b}{1-2+2b}$$

$$+ \frac{x-1-2b}{1-b+2b}$$

CANCELAMOS, PERO... SE IGUALA A 0 EL FACTOR CANCELADO PARA NO TENER SOLUCIÓN.

$$\hookrightarrow x-1-2b=0 \rightarrow x=1+2b$$

NOTA: LO QUE QUEDA LUEGO DE CANCELAR YA NO CONTIENE X.

AB) OBS: $2=1+1$

TRANSFORMANDO EN 1, SE TIENE:

$$\frac{x-1}{x+2b} - 1 = \frac{1-x}{x-2+b} + 1$$

$$\frac{x-1-x-2+b}{x+2-b} = \frac{1-x+2+b}{x-2+b}$$

$$\frac{b-2-1}{x+2-b} = \frac{b-2+1}{x-2+b}$$

$$\frac{(b-2)-1}{(b-2)+1} = \frac{x+(2-b)}{x-(2-b)}$$

$$\text{PPP: } \frac{x(b-2)}{-2} = \frac{x}{2-b}$$

$$\text{DE AQUI: } \frac{x}{2b} = 2-b$$

$$\therefore x = (2-b)^2$$

AD

OBS: $3=1+1+1$

$$\hookrightarrow \frac{2}{x-2} + 1 + \frac{b}{x-b} + 1 + \frac{c}{x-c} + 1 = 0$$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x-b} + \frac{x}{x-c} = 0$$

$$x \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \right) = 0$$

DE AQUI: $x=0 \rightarrow$ UNA SOLUCIÓN

LUEGO: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$

EFFECTUANDO SE OBTIENE:

$$3x^2 - 2(2+b+c)x + (2b+bc+2c) = 0$$

DE AQUI, DEBEMOS OBTENER UNA SOLUCIÓN (CON LA ANTERIOR HARIAN DOS SOLUCIONES)

DE LA ECUACIÓN: $\Delta = 0$

$$\hookrightarrow \Delta = 4(2+b+c)^2 - 4(2b+bc+2c) = 0$$

EFFECTUANDO:

$$\Delta = \frac{2^2+b^2+c^2-2b-bc-2c}{\text{CONOCIDO}} = 0$$

$$\frac{1}{2}[(2-b)^2 + (b-c)^2 + (c-2)^2] = 0$$

$$\text{NO } (2-b)^2 + (b-c)^2 + (c-2)^2 = 0$$

AQUI, ÚNICA POSIBILIDAD PARA QUE LA SUMA DE CUADRADOS VALGA 0, ES QUE CADA TERMO VALGA 0. CON ESTO: $2=b$; $b=c$ y $c=2$

CONCLUSIÓN: $2=b=c=2$

LUEGO, EN LA ECUACIÓN:

$$3x^2 - 2(3n)x + 3n^2 = 0$$

$$\sim x^2 - 2nx + n^2 = 0$$

$$(x-n)^2 = 0$$

DE AQUÍ: $x = n$

PERO: $n = a$

$$n = b \quad \rightarrow \quad n = \frac{a+b+c}{3}$$

$$n = c$$

$$\therefore x = \frac{a+b+c}{3}$$

50

	TEÑÍAS	TIENES	TELORÁS	TELORÍAS
TÚ	2X	X	3X	6X
YO		6X		

"... LO QUE YO TENGO, QUE ES 9 MAS DE LO QUE TENDRÁS"

$$\rightarrow 6X = 3X + 9 \rightarrow X = 3$$

OF: LOS DOS JUNTOS TIENEN: 7X

ES DECIR: $\frac{7}{2}$

51) LA ECUACIÓN:

$$x^2 + (a+b+c)x + m(a+b+c+2c) = 0$$

TENDRÁ RAÍCES REALES, SI $\Delta \geq 0$

$$\text{OF: } \Delta = (a+b+c)^2 - 4m(a+b+c+2c) \geq 0$$

AQUÍ TENDRÁMOS QUE ANALIZAR, QUE VALORES DE "m" HACEN QUE EL 1º MIEMBRO SEA MAYOR O IGUAL A 0.

OBSEVEMOS LOS VALORES DE "m" PARA LO CUAL OCURRE ESTO.

$$m = 0 \rightarrow \Delta = (a+b+c)^2 \geq 0 \checkmark$$

$$m = \frac{1}{2} \rightarrow \Delta = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c+2c)$$

$$\Delta = a^2 + b^2 + c^2 \geq 0 \checkmark$$

DEBEMOS QUE: $\left. \begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ (b-c)^2 &\geq 0 \\ (c-a)^2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} (+)$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

DESARROLLANDO SE TIENE:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a+b+c+2c) \geq 0$$

$$2a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c+2c) \geq 0$$

SUMAMOS Y RESTAMOS $2(a+b+c+2c)$

$$\rightarrow 2a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b+c+2c) - 2(a+b+c+2c) \geq 0$$

$$-(a+b+c+2c) \geq 0$$

$$\rightarrow (a+b+c)^2 - 3(a+b+c+2c) \geq 0$$

OF: PARA QUE ESTO SEA Δ

$$\rightarrow 4m = 3 \quad \therefore m = \frac{3}{4}$$

ESTE ES EL MAYOR VALOR.

52) Si a y b son raíces de la ecuación:

$$x^2 - 100x + 1 = 0$$

$$\rightarrow a+b = 100 \wedge ab = 1$$

NOS PIDEN: $T = \sqrt{a+b}$; $gr: T > 0$

ELEVADO AL CUADRADO:

$$T^2 = a+b + 2\sqrt{ab}$$

$$= 100 + 2\sqrt{1}$$

$$\rightarrow T^2 = 102 \quad \therefore T = \sqrt{102}$$

53) OF: $2 = 1 + 1$, TRANSPOSICIONANDO

TENIEMOS:

$$\frac{a+b}{x-a} - 1 + \frac{a+b}{x-b} - 1 = 0$$

$$\frac{ab+ba-x}{x-a} + \frac{ab+ab-x}{x-b} = 0$$

$$\Rightarrow (ab+ab-x) \left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right] = 0$$

DE AQUÍ:

$$+ab+ab-x=0 \rightarrow x_1 = ab+ab$$

$$+ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0 \rightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{1}{b-x}$$

$$\rightarrow b-x = x-a \rightarrow x_2 = \frac{a+b}{2}$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$m=ab \wedge n=ab$$

$$\therefore T = (ab)^2 - 2ab = \frac{(ab)^2}{x}$$

$$54) \text{ DE } \frac{2x-b}{2} + \frac{bx-a}{b} \leq 2$$

DESDEBLANDO, ESCRIBIMOS:

$$x - \frac{b}{2} + x - \frac{a}{b} \leq 2$$

$$\Rightarrow 2x \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{2} + 2$$

$$2x \leq \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2b}$$

$$x \leq \frac{(a+b)^2}{2b}$$

$$C.S. = (-\infty; \frac{(a+b)^2}{2b}]$$

$$55) \text{ DE } -9 < 2x-1 < 11; x \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ SUMO 1: } -8 < 2x < 12$$

$$\bullet \text{ DIVIDO POR 2: } -4 < x < 6$$

COMO $x \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x = -3; -2; -1; 0; 1; \dots; 5$$

$$\text{LUEGO: } S = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$$

6 ELEMENTOS

$\therefore$ # DE SUBCONJUNTOS

$$\text{PROPIOS DE } S \text{ S: } 2^6 - 1 = 63$$

$$56) \bullet \text{ DE } B: 3x < 4-x$$

$$\rightarrow 4x < 4 \rightarrow 2x < 2$$

$$\bullet \text{ RESTO 1: } 2x-1 < 1$$

$$\text{LUEGO: } B = (-\infty; 1]$$

NOTA: A SE PUEDE ESCRIBIR ASI:

$$A = \{x \in B \mid x > \frac{1}{3}\}$$

$$\text{CON ESTO: } A = (\frac{1}{3}; 1]$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = \frac{1}{3} \text{ y } b = 1$$

$$\therefore T = 3(\frac{1}{3}) - 1 = 0$$

57) ESCRIBIMOS:

$$[(x-n)-1][(x+n)+1] > [(x+n)-1][(x+n)+1]$$

$$(x-n)^2 - 1 > (x+n)^2 - 1$$

$$\sim (x+n)^2 - (x-n)^2 < 0$$

$$4(x)(n) < 0$$

DIVIDO POR n (DATO: $n < 0$):

$$\Rightarrow 4x > 0 \rightarrow x > 0$$

$$\therefore C.S. = [0; +\infty)$$

58) TRANSPOSICION:

$$(a-b)x + (b-a)x + (a-a) = 0$$

$$(a-b)x - (a-b)x - 1 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$[(A-B)x - (A-B)](x-1) = 0$$

DE AQUÍ:

$$+ x_1 = \frac{A-B}{A-B} = 1 ; x_2 = 1$$

EN LO PEDIDO, SE TIENE:

$$x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1 + 1 - 1 = 1$$

(50) ESCRIBIMOS:

$$\frac{1}{x+a+b+c} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}$$

$$\frac{x-x-a-b-c}{(x+a+b+c)x} = \frac{b+c+a+c}{(a+c)(b+c)}$$

$$\frac{-(a+b+c)}{(x+a+b+c)x} = \frac{a+b+c}{(a+c)(b+c)}$$

$$\rightarrow -(a+c)(b+c) = x^2 + (a+b+c)x$$

$$\rightarrow x^2 + (a+b+c)x + (a+c)(b+c) = 0$$

$$x \quad \swarrow \quad \searrow \quad \begin{matrix} a+c \\ b+c \end{matrix}$$

$$\rightarrow (x+a+c)(x+b+c) = 0$$

DE AQUÍ:

$$x = -a-c ; x = -b-c$$

(60) DE $3x^2 + px + 4 = 0$

Obs: $x_1 + x_2 = -\frac{p}{3} ; x_1 x_2 = \frac{4}{3}$

(a)

(b)

DEL DATO: $x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_2 = +\frac{1}{3}$

CASOS:

(1°) Si $x_2 = -3x_1$; EN (b): $-3x_1 = \frac{4}{3}$

$$\rightarrow x_1^2 = -\frac{4}{9}$$

$$\text{EN (a): } -2x_1 = -\frac{p}{3} \rightarrow x_1 = \frac{p}{6}$$

REEMPLAZANDO EN LO ANTERIOR:

$$\left(\frac{p}{6}\right)^2 = -\frac{4}{9} \rightarrow p^2 = 36\left(-\frac{4}{9}\right) \rightarrow p^2 = -16$$

$$\therefore p = 4i \vee p = -4i$$

(2°) Si $x_2 = 3x_1$, AQUÍ NO APARECE RESPUESTA.

(61) DE LA EC.: $2x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_1 = \frac{2+2i}{2} ; x_2 = \frac{2-2i}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1+i ; x_2 = 1-i$$

JUEGO: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$$f = \left(\frac{1+i}{1-i}\right) - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

PERO, SE SABE QUE:

$$\frac{1+i}{1-i} = i \quad \wedge \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\Rightarrow f = i - (-i) = 2i$$

PERO: $-i = i - 1$

JUEGO: $f = i - i - (i - 1)$

$$\rightarrow f = i - i - i + 1 = 1 - i$$

(62) RECUERDE

SIENDO x_1 y x_2 RAÍCES DE LA EC.: $ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$;

ESTAS RAÍCES SERÁN SIMÉTRICAS SI $x_1 + x_2 = 0$

$$\text{DE } (a-b)x^2 + 2(ab)x + (a-b) = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-2(ab)}{a-b} \quad \text{ó} \quad x_1 + x_2 = \frac{-2}{a-b}$$

SUPONGAMOS QUE TENEMOS QUE LAS
MÚLTIPLES A CADA ROTE PARA
QUE SEAN SIMÉTRICAS; ES DECIR:

$$(x_1 - n) + (x_2 - n) = 0$$

DE AQUÍ:

$$2n = x_1 + x_2$$

REEMPLAZANDO ARRIBA:

$$2n = \frac{-2}{a-b} \quad \therefore n = \frac{1}{b-a}$$

$$(63) \text{ DE } x^2 - 15x + a^3 = 0$$

$$\text{CONDICIÓN: } x_1 = x_2$$

$$\text{VEAMOS QUE: } x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \wedge x_1 x_2 = a^3$$

$$(a) \quad (b)$$

$$\text{FJ } (b): x_2^2 \cdot x_2 = a^3 \rightarrow x_2 = a$$

$$\text{CON ESTO: } x_1 = a^2$$

$$\text{FJ } (a): a^2 + a = \frac{15}{4}$$

$$4a^2 + 4a - 15 = 0 \rightarrow (2a+5)(2a-3) = 0$$

$$2a \quad \begin{array}{c} \nearrow 5 \\ \searrow -3 \end{array}$$

DE AQUÍ:

$$a = -5/2$$

$$\text{ó } a = 3/2 \quad \text{VALOR}$$

$$(64) \text{ DE } x^2 - 13x + K = 0$$

$$\text{CONDICIÓN: } x_1^2 + x_2^2 = 69 \dots (I)$$

$$\text{DE LA EC.: } x_1 + x_2 = 13 \wedge x_1 x_2 = K$$

$$(a)$$

$$(b)$$

$$+ (a)^2: x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 x_2) = 169$$

$$69 + 2K = 169$$

$$\text{DE AQUÍ: } K = 50$$

$$(65) \text{ I. EC: } a+b = \frac{a}{c}; \quad ab = a$$

$$(a)$$

$$(b)$$

$$\text{II. EC: } c+d = \frac{b}{c}; \quad cd = b$$

$$(c)$$

$$(d)$$

$$(b) \times (d): abcd = bcd \rightarrow ac = 1$$

$$(a) \times (c): 1 + ad + bc = 0$$

$$(a) \div (c): \frac{a+b}{cd} = \frac{ad}{bc}$$

$$\rightarrow b + bc = ad + ad^2$$

$$\rightarrow b(1+bc) = d(1+ad)$$

$$\rightarrow b(-ad) = d(-bc) \rightarrow a = c = 1$$

$$\text{FJ } (a) \text{ y } (b): b = d = -1/2$$

$$\therefore T = (1)(-1/2)(1)(-1/2) = \frac{1}{4}$$

$$(66) \text{ DE } x^2 - (m+2)x + (m+1) = 0$$

$$\begin{array}{c} x \quad \nearrow -(m+1) \\ x \quad \searrow -1 \end{array}$$

$$(x - (m+1))(x - 1) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } x_1 = m+1; \quad x_2 = 1$$

$$\text{OF: } x_1^2 + x_2^2 = (m+1)^2 + 1^2$$

ESTO DEBE

SER MÍNIMO

$$\text{OF: SERÁ MÍNIMO CUANDO } (m+1)^2 = 0$$

$$\text{VALE DECIR, CUANDO: } m = -1$$

$$\text{CON ESTO: } x_1 = 0 \wedge x_2 = 1$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 1$$

67) RECUERDE

EL TRINOMIO $P(x) = ax^2 + bx + c$
CON $a > 0$, TOMA SU MÍNIMO
VALOR CUANDO $x = -\frac{b}{2a}$; ES

DECIR:

$$\text{MÍNIMO VALOR DE } P(x) = P\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

EN EL PROBLEMA:

$$\text{DE } P(x) = x^2 - 4x + (m^2 - m + 5)$$

EL MÍNIMO VALOR DE $P(x)$ SE
OBTIENE CUANDO $x = \frac{4}{2(1)} = 2$

$$\text{MÍN. DE } P(x) = P(2) = 4 - 8 + m^2 - m + 5$$

$$\text{USANDO EL DATO: } m^2 - m + 1 = 3$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m+1)(m-2) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } m = -1 \vee m = 2$$

$$\text{68) DE } ax^2 + (a+1)x + a = 0$$

$$\begin{array}{l} ax \quad \swarrow \quad \searrow \quad -1 \\ x \quad \quad \quad \quad -a \end{array}$$

$$\rightarrow (ax-1)(x-a) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } x_1 = \frac{1}{a} \vee x_2 = a$$

$$\text{1º CASO: SI } x_1 = 4x_2$$

$$\rightarrow \frac{1}{a} = 4a \rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{DE AQUÍ: } a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{DONDE: MÍNIMO VALOR DE } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{2º CASO: SI } x_2 = 4x_1$$

$$\rightarrow a = 4 \cdot \frac{1}{a} \rightarrow a^2 = 4$$

$$\text{DE AQUÍ: } a = 2 \vee a = -2$$

$$\text{DONDE: MÍNIMO VALOR DE } a = -2$$

FINALMENTE:

$$\text{EL MÍNIMO DE LOS MÍNIMOS: } -2$$

68) RECUERDE

SI LA EC. $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$
TIENE RAÍCES RECÍPROCAS, EN-
TONCES: $a = c$

APLICANDO EN:

$$(2k+2)x^2 + (4-4k)x + (k-2) = 0; k \neq -1$$

SE DEBE CUMPLIR:

$$2k+2 = k-2 \rightarrow k = -4$$

$$\text{EN LA EC.: } -6x^2 + 20x - 6 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{l} 3x \quad \swarrow \quad \searrow \quad -1 \\ x \quad \quad \quad \quad -3 \end{array}$$

$$\rightarrow (3x-1)(x-3) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = 3$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{9} + 9 = \frac{82}{9}$$

69) RECUERDE

SI LA EC. $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$
TIENE RAÍCES SIMÉTRICAS, EN-
TONCES: $b = 0$

DE LA ECUACIÓN:

$$(k-1)x^2 - b(k-1)x = a(k+1)x - c(k+1)$$

$$(k-1)x^2 [b(k-1) + a(k+1)]x + c(k+1) = 0$$

AQUÍ, PARA QUE LAS RAÍCES SEAN
SIMÉTRICAS, SE DEBE CUMPLIR:

$$-[b(k-1) + a(k+1)] = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } b(k-1) + a(k+1) = 0$$

$$k(b+a) = b-a$$

$$\therefore k = \frac{b-a}{a+b}$$

11) DE LA ECUACIÓN:

$$mx^2 - (2m-1)x - 3(m+1) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} mx & & m+1 \\ & \nearrow & \searrow \\ & x & -3 \end{array}$$

$$\rightarrow (mx + m+1)(x-3) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } +x_1 = \frac{-(m+1)}{m}$$

$$+x_2 = 3$$

$$\text{OTO: } < -1\frac{1}{2}; 3] = < -\frac{3}{2}; 3]$$

SEGÚN CONDICIÓN, LAS RAÍCES ESTÁN COMPRENDIDAS EN EL INTERVALO $< -\frac{3}{2}; 3]$, ENTONCES SE DEBE CUMPLIR:

$$-\frac{3}{2} < \frac{-(m+1)}{m} \leq 3$$

$$\cdot \text{POR } (-1): -3 \leq \frac{m+1}{m} < \frac{3}{2}$$

$$\cdot \text{DE DOBLO: } -3 \leq 1 + \frac{1}{m} < \frac{3}{2}$$

$$\cdot \text{RESTO } (-1): -4 \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$$

DE AQUÍ:

$$-4 \leq \frac{1}{m} < 0 \vee 0 \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{m \leq -\frac{1}{4}} \vee \underbrace{\hspace{1cm}}_{m > 2}$$

$$\therefore m \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup (2; +\infty)$$

12) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$x^2 + 2nx + (n - \frac{3}{16}) > 0$$

AHORA, PARA QUE SE VERIFIQUE $\forall x \in \mathbb{R}$, AQUÍ SE DEBE CUMPLIR:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \Delta = 4n^2 - 4(n - \frac{3}{16}) < 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } 16n^2 - 16n + 3 < 0$$

$$\begin{array}{ccc} 4n & & -3 \\ & \nearrow & \searrow \\ & 4n & -1 \end{array}$$

$$(4n-3)(4n-1) < 0$$

$$\text{DONDE: } \frac{1}{4} < n < \frac{3}{4}$$

13) PARA CALCULAR LA ABSCISA (LA X) DEL PUNTO DE TANGENCIA ENTRE LA RECTA Y LA PARÁBOLA, SE RESUELVE LA ECUACIÓN:

$$mx - 3 = 3x^2, \text{ DE DONDE OBTENEMOS: } 3x^2 - mx + 3 = 0$$

DES: COMO EL PUNTO DE TANGENCIA ES ÚNICO, EN CONSECUENCIA X TIENE QUE TOMAR UN SOLO VALOR, OSEA QUE LA ECUACIÓN TIENE QUE TENER SOLUCIÓN ÚNICA, POR TANTO, LAS RAÍCES DE ELLA TIENEN QUE SER IGUALES, ESTO OCURRE CUANDO

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = (-m)^2 - 4(3)(3) = 0$$

$$\rightarrow m^2 = 36 \rightarrow m = 6 \text{ ó } -6$$

$$\text{POR DATO: } m > 0 \therefore m = 6$$

14) EFECTUANDO:

$$\frac{x-b+x-a}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{x-c}$$

$$(2x - (a+b))(x-c) = (x-a)(x-b)$$

$$2x^2 - 2cx - (a+b)x + (a+b)c = x^2 - (a+b)x + ab$$

DE AQUÍ:

$$x^2 - 2cx + [(a+b)c - ab] = 0$$

OTO: PARA QUE TENGA RAÍCES REALES DIFERENTES $\Delta > 0$

$$\text{DES: } \Delta = (-2c)^2 - 4(1)[(a+b)c - ab] > 0$$

$$\sim 4c^2 - 4(a+b)c + 4ab > 0$$

$$c^2 - (a+b)c + ab > 0$$

Factorizo: $(c-a)(c-b) > 0$

Como $a > b$ (dato)

$$\Rightarrow c < b \vee c > a$$

75) Sean α y β raíces de la ec.

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -p \wedge \alpha\beta = q$$

Ahora, si α y β son raíces de la

$$\text{bicuadrada: } x^2 + (p+2)x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = p+2 \wedge (\alpha\beta)^2 = 4$$

De aquí: $\alpha\beta = 2$ (porque $\alpha\beta = 2$)

De $\alpha + \beta = -p$

$$\text{Al } \square: \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\beta) = p^2$$

$$p+2 + 2(2) = p^2$$

$$p^2 - p - 6 = 0 \Rightarrow (p-3)(p+2) = 0$$

$$\text{De aquí: } p = 3 \vee p = -2$$

$$\text{Finalmente: } p = 3 \text{ y } q = 2$$

Nota: Para los otros posibilidades no aparece respuesta.

76) $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$$(m-1) - (m+2) = (2-m) - (m-1)$$

$$-3 = -2m+3$$

$$\text{De aquí: } m = 3$$

Luego: la ecuación es:

$$5x^4 + 2x^2 - 1 = 0$$

$$\text{Donde: } x = \pm \sqrt{\frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{10}}$$

De aquí, mayor valor de la

$$\text{raíz, es: } \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{6}}{5}}$$

77) la ecuación

$$(13-k)x^4 + \left(\frac{k-3}{4}\right)x^3 + \left(\frac{k-5}{2}\right)x^2 + \left(\frac{k-2}{5}\right)x - k = 0$$

es bicuadrada, entonces, debe carecer de término cúbico y término lineal.

$$\Rightarrow \frac{k-3}{4} = 0 \wedge \frac{k-2}{5} = 0$$

$$\Rightarrow k = 3 \wedge k = 2$$

Luego, la ecuación es:

$$x^4 + x^2 - 12 = 0$$

$$\text{Factorizo: } (x^2+4)(x^2-3) = 0$$

De aquí:

$$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x = \pm 2i$$

$$x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

con esto:

(I) es V; (II) es V; (III) es F; (IV) es V

$$\therefore \text{VVFV}$$

78) Desarrollado por Binomio de Newton:

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Restando y reemplazando en la igualdad dada, se tiene:

$$10x^4 + 20x^2 + 2 = 2x^4 + 35x^2 - 10$$

$$\text{De aquí: } x^4 - 5x^2 + 14 = 0$$

$$(x^2-4)(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$$

De aquí:

$$x_1 = -2; x_2 = 2; x_3 = -1; x_4 = 1$$

$$\therefore x_2 - x_1 = 2 - (-2) = 4$$

(70) Si α y β son raíces de una ecuación cuadrada, entonces, las otras raíces son $-\alpha$ y $-\beta$.
Luego, la ecuación que dio origen a estas es:

$$x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha\beta)^2 = 0 \quad (I)$$

Por dato:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 35$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{35}{2}$$

$$\alpha\beta(-\alpha)(-\beta) = 70 \Rightarrow (\alpha\beta)^2 = 70$$

$$\text{En (I): } x^4 - \frac{35}{2}x^2 + 70 = 0$$

$$\text{ó } 2x^4 - 35x^2 + 140 = 0$$

(80) Ecuación cuadrada:

$$mx^2 + nx + 36 = 0$$

"3" satisface a la ecuación, por ser raíz.

$$\hookrightarrow 9m + 3n + 36 = 0$$

$$9m + n + 4 = 0 \rightarrow m = \frac{-(n+4)}{9}$$

Además, si 3 y $(n+5)$ son raíces

$$\hookrightarrow \text{Prod. de raíces} = (3(n+5))^2$$

$$\text{de la ec.: Prod. de raíces} = \frac{36}{m}$$

Luego:

$$(3(n+5))^2 = \frac{36}{m} \rightarrow 9(n+5)^2 = \frac{36}{\frac{-(n+4)}{9}}$$

De aquí:

$$(n+5)^2 = \frac{-36}{n+4}; \text{ hacemos: } n+5 = x$$

$$\hookrightarrow x^2 = \frac{-36}{x-1} \rightarrow x^2(x-1) + 36 = 0$$

Factorizado por divisores binomios

$$\begin{array}{r|rrrr} x-2 & 1 & -11 & 0 & 36 \\ & \downarrow & 2 & -18 & -36 \\ \hline & 1 & -9 & -18 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2 - 9x - 18) = 0$$

De aquí:

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \hookrightarrow n+5=2$$

$$\text{Dado: } n = -13$$

$$\hookrightarrow x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{153}}{2}$$

$$\hookrightarrow n+5 = \frac{9 + \sqrt{153}}{2} \vee n+5 = \frac{9 - \sqrt{153}}{2}$$

$$\text{Haciendo } \sqrt{153} \approx 12,4$$

tenríamos:

$$n = -4,3 \vee n = -16,7$$

Mejor valor

$$(81) \text{ de } (5n+2)x^4 - (4n+9)x^2 + 3(n+2) = 0$$

$$\text{Producto de raíces} = \frac{3(n+2)}{5n+2} = 1 \quad (\text{dato})$$

$$\therefore 3n^2 + 6 = 5n^2 + 2 \rightarrow n^2 = 2$$

$$\text{En la ec.: } 12x^4 - 25x^2 + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 \quad \uparrow \quad -3 \\ 3x^2 \quad \downarrow \quad -4 \end{array}$$

$$\therefore (4x^2 - 3)(3x^2 - 4) = 0$$

$$(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2) = 0$$

De aquí:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}; x_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}; x_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{Raíz de mayor valor absoluto: } \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(3x^2 - 5x - 2)(2x^2 - 5x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{cc} 3x & \nearrow & 1 & 2x & \nearrow & 1 \\ & \searrow & -2 & & \searrow & -3 \end{array}$$

$$(3x+1)(x-2)(2x+1)(x-3) = 0$$

DE AQUÍ:

$$x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = 2; x_3 = -\frac{1}{2}; x_4 = 3$$

$$\text{OJ: } x_3 + x_4 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

CON ESTO:

$$(I) \text{ F; } (II) \text{ V; } (III) \text{ V; } (IV) \text{ V}$$

$$\therefore \text{FVVV}$$

$$(86) \text{ DE } x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

$$\hookrightarrow x^2(x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 0 \quad (I)$$

$$\text{COMO: } y = x + \frac{1}{x} \rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\text{DONDE: } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$\text{EN (I): } x^2(y^2 - 2 + y - 4) = 0$$

$$\hookrightarrow x^2(y^2 + y - 6) = 0$$

$$(87) \text{ POR ASPECTO DOBLE ESPECIAL:}$$

$$2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2x^2 & \nearrow & 2 \\ & \searrow & 1 \\ x^2 & \nearrow & -2x \\ & \searrow & 1 \end{array}$$

$$\hookrightarrow (2x^2 + 7x + 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

DE AQUÍ:

$$+ 2x^2 + 7x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$+ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\rightarrow x = 1 \text{ RAÍZ DOBLE.}$$

$$\therefore \text{MAJOR RAÍZ: } \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}$$

$$(88) \text{ EFECTUANDO:}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 15 + 24 - 4x}{x^2 - 2x - 15} > 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 15} > 0 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{(x-5)(x+3)} > 0$$

OJ: PARA QUE LA DESIGUALDAD SE VERIFIQUE, SE DEBE CUMPLIR:

$$(x-5)(x+3) > 0; x \neq 3$$

$$\text{DE AQUÍ: } x < -3 \vee x > 5$$

$$\therefore \text{OJ: } (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$$

$$(89) \text{ TRANSFORMANDO: } \frac{x^2}{x^2 + 2} - \frac{x-2}{x+2} > 0$$

$$\frac{x^2 + 2x^2 - x^2 + 2x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 2)(x + 2)} > 0$$

$$\frac{2(2x^2 - x + 2)}{(x^2 + 2)(x + 2)} > 0$$

ESTO ES (+) Y XER

PARA QUE LA DESIGUALDAD SE VERIFIQUE SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$$

$$\therefore \text{OJ: } (-2, +\infty)$$

$$(90) \text{ OJ: } (5x^2 - 6x + 5) \text{ ES (+), Y XER.}$$

DADO QUE $5 > 0 \wedge \Delta < 0$

SE PUEDE ESCRIBIR:

$(6n+3)x^2 + (-8n-10)x + (5n+9) >$
 $< (5n+10)x^2 + (-6n-12)x + (5n+10)$
 TRANSPOSICIÓN AL 2º MIEMBRO Y
 REDUCIENDO:

$(7-n)x^2 + (2n-2)x + 1 > 0$
 AQUÍ, PARA QUE VERIFIQUE
 $\forall x \in \mathbb{R}$, SE DEBE CUMPLIR:

$$7-n > 0 \wedge \Delta < 0$$

$$\rightarrow 7-n > 0 \wedge (2n-2)^2 - 4(7-n)(1) < 0$$

EFFECTUANDO SE OBTIENE:

$$n < 7 \wedge n^2 - n - 6 < 0$$

$$n < 7 \wedge (n+2)(n-3) < 0$$

$$n < 7 \wedge (-2 < n < 3)$$

$$\text{INTERSECTANDO: } -2 < n < 3$$

$$\therefore n \in (-2, 3)$$

91) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\frac{(2x^2-5x+2)-2}{2x^2-5x+2} > \frac{(x^2-3x+3)-1}{x^2-3x+3}$$

DESDOBLANDO:

$$\sqrt{x} \frac{2}{2x^2-5x+2} > \sqrt{x} \frac{1}{x^2-3x+3}$$

$$\frac{-2}{2x^2-5x+2} + \frac{1}{x^2-3x+3} > 0$$

$$\frac{-2x^2+6x-6+2x^2-5x+2}{(2x^2-5x+2)(x^2-3x+3)} > 0$$

$$\frac{x-4}{(2x-1)(x-2)(x^2-3x+3)} > 0$$

ES (+) $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\Delta < 0$)

DE AQUÍ: $\frac{x-4}{(2x-1)(x-2)} > 0$



$$\text{es: } \frac{1}{2} < x < 2 \vee x > 4$$

es: los ENTEROS POSITIVOS q NO
 VERIFICAN LA DESIGUALDAD SON:

$$2 \vee 3$$

$\therefore$ los 2 VALORES ENTEROS
 POSITIVOS q NO VERIFICAN

$$92) \text{ DE } \frac{(x-2)^2(x-3)^2}{(x-4)^2} > 0$$

$$\text{si } x \in \mathbb{R} = (-\infty; 2] \cup (4; +\infty) \cup \{3\}$$

PODEMOS AFIRMAR QUE:

b ES PAR; a y c SON IMPARES

y COMO $T = a+b+c$ DEBE SER
 MÍNIMO $\Rightarrow$ a, b y c TAMBIÉN
 DEBEN SER MÍNIMOS.

$$\text{LUEGO: } a=1; b=2 \text{ y } c=1$$

$$\therefore T = 1+2+1 = 4$$

93)

$$\text{DE } \frac{(x-1)^{30}(x+2)^3}{(x^2+x+2)(x-5)} > 0$$

$$\text{es: } (x-1)^{30} \text{ ES } > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot (x^2+x+2) \text{ ES } (+), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(1 > 0 \wedge \Delta = -7 < 0)$$

EN LA INECUACIÓN MULTIPLICAMOS POR $\left[\frac{x^2+x+2}{(x-1)^3(x+2)^2} \right]$, NOS QUEDARÁ:

$$\frac{x+2}{x-5} \geq 0; \text{OTO: } \underline{x=1} \text{ VERIFICA!}$$

DE AQUÍ: $x \leq -2 \vee x \geq 5$

$$\Rightarrow \text{C.S.} = (-\infty; -2] \cup (5; +\infty) \cup \{1\}$$

O TAMBIÉN: C.S. = $(\mathbb{R} \setminus (-2; 5]) \cup \{1\}$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = -2 \text{ y } b = 5$$

$$\therefore T = 5 - (-2) = \underline{7}$$

$$\textcircled{94} \quad 2\sqrt{ax} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{x(ax)}$$

ELEVAMOS AL CUADRADO:

$$4(ax) + a - x + 4\sqrt{ax} \sqrt{a-x} = a - x + \sqrt{x(ax)} \sqrt{a-x}$$

$$= a - x + \sqrt{x(ax)}$$

$$4\sqrt{ax}(\sqrt{ax} + \sqrt{a-x}) = \sqrt{x} \sqrt{ax}$$

$$\text{OTO: } \sqrt{ax} = 0 \rightarrow \underline{x=0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Solución} \end{array} \right.$$

DE LO QUE QUEDA:

$$4(\sqrt{ax} + \sqrt{a-x}) = \sqrt{x}$$

$$\bullet \text{AL } \square: 16(ax + a - x + 2\sqrt{ax} \sqrt{a-x}) = x$$

$$\hookrightarrow 32a + 32\sqrt{ax} \sqrt{a-x} = x$$

$$32\sqrt{ax} \sqrt{a-x} = x - 32a$$

$$\bullet \text{AL } \square: 1024x^2 - 1024x = x^2 - 64ax$$

$$+ 1024a^2$$

$$\rightarrow 64ax = 1025x^2$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{64a}{1025}}$$

$$\textcircled{95} \quad \sqrt{m-5} + \sqrt{2m-3} + \sqrt{m+3} + \sqrt{2m-3} = \tau\sqrt{2}$$

$$\text{USAMOS: } \sqrt{2m-3} = a \rightarrow m = \frac{a^2+3}{2}$$

REEMPLAZANDO EN LA ECUACIÓN:

$$\sqrt{\frac{a^2+3}{2}} - 1 + a + \sqrt{\frac{a^2+3}{2}} + 3 + 3a = \tau\sqrt{2}$$

EFFECTUANDO:

$$\frac{\sqrt{a^2+3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{a^2+3} + 9}{\sqrt{2}} = \tau\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a+3)^2} = \tau\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{DE AQUÍ: } 2a+4 = 14 \rightarrow a = 5$$

$$\text{LUEGO: } m = \frac{5^2+3}{2} \rightarrow m = 14$$

$$\text{POR DATO: } 14 = \underline{a+b} \rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \end{array}$$

$$\therefore T = (1+4)^2 = \underline{25}$$

$$\textcircled{96} \quad \text{DE } (x+6)^{5/6} + x^2 = x(x+6)^{1/2} + x(x+6)^{4/3} \dots (I)$$

OBSERVESE: $\underline{x > 0}$

$$\text{SEA: } (x+6)^{1/2} = a \wedge (x+6)^{1/3} = b$$

$$\text{EN (I): } ab + x^2 = xab + x^2b$$

$$\rightarrow \underline{x^2 - ab + xab = 0}$$

$$(x-a)(x-b) = 0 \Rightarrow \underline{x=a \vee x=b}$$

$$(i) \text{ SI } x=a \rightarrow x = (x+6)^{1/2}$$

$$\bullet \text{AL } \square: x^2 = x+6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow \underline{x=3} \vee \underline{x=-2}$$

$$(ii) \text{ SI } x=b \rightarrow x = (x+6)^{1/3}$$

$$\bullet \text{AL CUBO: } x^3 = x+6 \rightarrow x^3 - x - 6 = 0$$

FACTORIZANDO POR DIVISORES BINOMIOS, SE TIENE: $(x-2)(x^2+2x+3) = 0$

$$\text{AQUÍ: } x \notin \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{x-2=0} \rightarrow \underline{x=2}$$

$$\text{LUEGO: } S = \{2; 3\}$$

∴ PARA LAS PROPOSICIONES: $\underline{FFVF}$

97) $\sqrt{3x^2-16x+24} + \sqrt{3x^2-16x-3} = 9$ (I)

OBSÉRVESE QUE:

$$(3x^2-16x+24) - (3x^2-16x-3) = 27$$

$$\frac{(3x^2-16x+24) + (3x^2-16x-3)}{(3x^2-16x+24) - (3x^2-16x-3)} = \frac{9}{27}$$

1. $\sqrt{3x^2-16x+24} - \sqrt{3x^2-16x-3} = 3$ (II)

• (I) + (II) $\cdot 2 \sqrt{3x^2-16x+24} = 12$

• AL $\square$: $3x^2-16x+24 = 36$

DE AQUÍ: $3x^2-16x-12 = 0$

• DONDE: SUMA DE RAÍCES = $\frac{16}{3}$

98) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\sqrt[3]{\frac{5x-2}{10}} + \sqrt[3]{\frac{2x-5}{10}} = \sqrt[3]{\frac{28(x-1)}{10}}$$

$$\sqrt[3]{5x-2} + \sqrt[3]{2x-5} = \sqrt[3]{28(x-1)}$$

$$\sqrt[3]{5x-2} + \sqrt[3]{2x-5} - \sqrt[3]{28(x-1)} = 0$$
 (I)

POR PRODUCTOS NOTABLES:

Si $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

APLICANDO EN (I):

$$(5x-2) + (2x-5) - 28(x-1) = 0$$

$$= 3 \sqrt[3]{5x-2} \cdot \sqrt[3]{2x-5} \cdot (-\sqrt[3]{28(x-1)})$$

REDUCIENDO, NOS QUEDA:

$$28(x-1) = 3 \sqrt[3]{(5x-2)(2x-5) \cdot 28(x-1)}$$

ELEVAMOS AL CUBO:

$$28^3(x-1)^3 = 27(5x-2)(2x-5) \cdot 28(x-1)$$

CANCELAMOS $28(x-1)$, PERO PARA NO PERDER SOLUCIÓN:

$$28(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

LUEGO, NOS QUEDA POR RESOLVER:

$$49(x-1)^2 = (5x-2)(2x-5) \cdot 4$$

$$\rightarrow 49x^2 - 98x + 49 = 40x^2 - 16x + 40$$

DE AQUÍ, SE OBTIENE: $9x^2 - 82x + 9 = 0$

$$\rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x = -1$$

• SUMAMOS: $x_1 = 1 \wedge x_2 = -1$

ENTONCES:

$$R = \frac{1+2}{-1+2} + \frac{-1+2}{1+2} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

99) DE $\sqrt[3]{2a+bx} + \sqrt[3]{2a-bx} = \sqrt[3]{b}$

$$\sqrt[3]{2a+bx} + \sqrt[3]{2a-bx} - \sqrt[3]{b} = 0$$

SIMILAR AL PROB. ANTERIOR:

$$(2a+bx) + (2a-bx) - b = 0$$

$$3 \sqrt[3]{2a+bx} \cdot \sqrt[3]{2a-bx} \cdot (-\sqrt[3]{b})$$

$$\rightarrow 2a-b = -3 \sqrt[3]{(a^2-x)b}$$

ELEVAMOS AL CUBO:

$$(2a-b)^3 = -27(a^2-x)b$$

$$\rightarrow a^2-x = \frac{(2a-b)^3}{27b}$$

DESPEJANDO X: $x = \frac{(2a-b)^3 + 27a^2b}{27b}$

100) OBSÉRVESE:

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = 3 \text{ ¿SI?}$$

DE AQUÍ: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}$; $x \geq 0$

REEMPLAZANDO EN LA ECUACIÓN:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 6 - (\sqrt{x+3} + \sqrt{x})$$

$$\rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$$

• AL $\square$: $x+3+2\sqrt{x+3}\sqrt{x}+x=9$

$$\rightarrow \sqrt{(x+3)x} = 3-x$$

• AL $\square$: $\sqrt{x+3x} = 9 - 6x + \sqrt{x}$
 DE AQUI: $x = 1$

CON ESTO:

(I) $\exists V$; (II) $\exists F$; (III) $\exists F$

$\therefore VFF$

(101) TRANSFORMEMOS ($x \neq 1$):

$$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \frac{3\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{x}}{4}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \frac{3\sqrt{2x-2} \cdot \sqrt{x}}{4} \dots (I)$$

HACEMOS $\sqrt{x} = a$ $\wedge$ $\sqrt{2-x} = b$

$$\Rightarrow x = a^2 \wedge 2-x = b^2 \quad \downarrow \quad 2x-2 = a^2 - b^2$$

EN (I): $a-b = \frac{3\sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{a^2}}{4}$

AL CUBO: $(a-b)^3 = (a^2-b^2)a$

$$(a-b)(a+b)^2 = (a+b)(a-b)a$$

Si $a-b=0$, SE OBTIENE: $x=1$

NO QUEDA: $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - 2ab$

DE AQUI: $b(b-3a)=0$

$\downarrow$ $b=0$ $\vee$ $b=3a$

$\sqrt{2-x}=0$ $\vee$ $\sqrt{2-x}=3\sqrt{x}$

$2-x=0$ $\vee$ $2-x=9x$

$x_1=2$ $\vee$ $x_2=1/5$

NOSE PIDEN: $x_1+x_2=?$

$\therefore x_1+x_2 = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

(102) EFECTUANDO:

$$\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1}{2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1} = \frac{m^5}{243} (x-\sqrt{x^2-1})$$

DESDEBLANDO, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)}{2x^2-2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)} = \frac{m^5}{243} (x-\sqrt{x^2-1})$$

$$\frac{x^2-2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)}{243}$$

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{m^5}{243} (x-\sqrt{x^2-1}) \dots (\alpha)$$

PERO, OBSERVESE QUE:

$$(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1}) = 1 \quad \text{¿SÍ?}$$

DE AQUI: $x-\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

EN (α):

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{1} = \frac{m^5}{243} \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})}$$

EFECTUANDO:

$$(x+\sqrt{x^2-1})^5 = \frac{m^5}{243}$$

SAcando 5 $^{\circ}$: $x+\sqrt{x^2-1} = \frac{m}{3}$

DE AQUI: $3\sqrt{x^2-1} = m-3x$

AL $\square$: $9x^2-9 = m^2-6mx+9x^2$

DE DONDE: $x = \frac{m^2-9}{6m}$

$\therefore C.S. = \left\{ \frac{m^2-9}{6m} \right\}$

(103) DE A: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < 3x \dots (I)$

OS: $x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \wedge 3x > 0$

$x > -1 \wedge x > 1 \wedge x > 0$

INTERSECTANDO: $x > 1$ (α)

EN (I): $x+\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + x < 3x$

DE AQUI: $\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} < \frac{x}{2}$

$\vee \sqrt{x^2-1} < \frac{x}{2}$

RECUERDE

RESOLVER $\sqrt{x} < a$ EQUIVALE A
RESOLVER: $a > 0 \wedge x < a^2$

APLICANDO EN LO ANTERIOR:

$$\frac{x}{2} > 0 \wedge x^2 - 1 < \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$x > 0 \wedge 4x^2 - 4 < x^2$$

$$x > 0 \wedge 3x^2 - 4 < 0$$

$$x > 0 \wedge (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2) < 0$$

$$x > 0 \wedge \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

INTERSECTANDO: $0 < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ (P)

LUEGO: C.S. = $(\alpha) \cap (P)$
 $= [1; +\infty) \cap (0; \frac{2}{\sqrt{3}})$

$\therefore$ C.S. = $[1; \frac{2}{\sqrt{3}})$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$a = 1$ y $b = 2 \therefore T = 1 + 2 = 3$

(9) DE $\frac{n\sqrt{ax+1} + n\sqrt{ax}}{\sqrt{ax+1} - \sqrt{ax}} = \frac{a}{1}$

PPP: $\frac{2n\sqrt{ax+1}}{2n\sqrt{ax}} = \frac{a+1}{a-1}$

• ALA N: $\frac{ax+1}{ax} = \frac{(a+1)^n}{(a-1)^n}$ (α)

DEL DATO: $(a-1)^n = \frac{a(a+1)^n}{a+1}$

DE AQUI: $\frac{a+1}{a} = \frac{(a+1)^n}{(a-1)^n}$

EN (α): $\frac{ax+1}{ax} = \frac{a+1}{a}$

$\rightarrow ax+1 = ax+x \therefore x = 1$

RECUERDE

RESOLVER $\sqrt{x} > a$ EQUIVALE A
RESOLVER:

$(a > 0 \wedge x > a^2) \vee (a < 0 \wedge x > 0)$

DE $\sqrt{1-2x} > x$; SE TIENE:

(i) $x > 0 \wedge 1-2x > x^2$

✓

(ii) $x < 0 \wedge 1-2x > 0$

DE (i): $x > 0 \wedge x^2 + 2x < 1$

$x > 0 \wedge (x+1)^2 < 2$

$x > 0 \wedge -\sqrt{2} < x+1 < \sqrt{2}$

$x > 0 \wedge -\sqrt{2}-1 < x < \sqrt{2}-1$

INTERSECTANDO: $0 < x < \sqrt{2}-1$ (Si)

DE (ii): $x < 0 \wedge x < \frac{1}{2}$

INTERSECTANDO: $x < 0$ (Si)

LUEGO: $S = S_i \cup S_{ii}$

$\therefore S = [0; \sqrt{2}-1) \cup (-\infty; 0)$

$S = (-\infty; \sqrt{2}-1)$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$a = \sqrt{2}-1 \rightarrow a+1 = \sqrt{2}$

$\therefore T = (a+1)^2 = 2$

(10) DE $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3 \dots (I)$

CS: $2x+1 > 0 \wedge x+8 > 0$

$x > -\frac{1}{2} \wedge x > -8$

INTERSECTANDO: $x > -\frac{1}{2}$ (α)

DE (I): $\sqrt{2x+1} > 3 + \sqrt{x+8}$

• AL $\square$: $2x+1 > 0 \wedge 6\sqrt{x+8} + x+8$

DE AQUÍ: $\sqrt{x+8} < \frac{x-16}{6}$

APLIQUE EL "RECUERDE" DE LA RESOLUCIÓN 103:

$$\frac{x-16}{6} > 0 \wedge x+8 < \left(\frac{x-16}{6}\right)^2$$

$$x > 16 \wedge 36x + 288 < x^2 - 32x + 256$$

$$x > 16 \wedge x^2 - 68x - 32 > 0$$

AQUÍ: $x = 34 \pm 6\sqrt{33}$

$$x > 16 \wedge (x < 34 - 6\sqrt{33} \vee$$

$$x > 34 + 6\sqrt{33})$$

INTERSECTANDO: $x > 34 + 6\sqrt{33} \mid (\beta)$

DESDE, LA SOLUCIÓN SE OBTIENE

INTERSECTANDO (α) CON (β) :

$$\Rightarrow x > 34 + 6\sqrt{33}$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = 34; b = 6; c = 33$$

$$\therefore a+b+c = 73$$

(107) DE $2\sqrt{x^3-7} < x-1$

ELEVAMOS AL CUBO:

$$x^3 - 7 < x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

DE AQUÍ: $x^2 - x - 2 < 0$

$$\sim (x+1)(x-2) < 0$$

$$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ ó C.S.} = (-1; 2)$$

(108) DE $3\sqrt{x^3-3x^2+5x-6} < x-2$

ELEVAMOS AL CUBO:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 6 < x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

DE AQUÍ: $3x^2 - 7x + 2 < 0$

$$\begin{array}{c} 3x \\ \swarrow \searrow \\ x \quad -1 \\ \quad -2 \end{array}$$

$$\sim (3x-1)(x-2) < 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} < x < 2 \text{ ó C.S.} = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$$

(109) APLIQUE EL "RECUERDE" DE LA RESOLUCIÓN 103.

• DE $\sqrt{1-x^2} < 2x-1$

$$\sim 2x-1 > 0 \wedge 1-x^2 < (2x-1)^2$$

$$x > \frac{1}{2} \wedge 1-x^2 < 4x^2-4x+1$$

$$x > \frac{1}{2} \wedge x(5x-4) > 0$$

$$x > \frac{1}{2} \wedge (x < 0 \vee x > \frac{4}{5})$$

INTERSECTANDO: $x > \frac{4}{5}$

VEAMOS QUE VALORES ENTEROS DE x SON: 1; 2; 3; ...

$\therefore$ PODEMOS DECIR: MÁS DE 3

(110) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-3x} < \sqrt{x} + 4$

C.S.: $1-x > 0 \wedge 1-2x > 0 \wedge 1-3x > 0$

$$\wedge x > 0$$

$$\rightarrow x < 1 \wedge x < \frac{1}{2} \wedge x < \frac{1}{3} \wedge x > 0$$

INTERSECTANDO: $0 < x < \frac{1}{3} \mid (\alpha)$

ANALICEMOS:

CON (α) , VEMOS QUE EL MÁXIMO VALOR QUE TOMAN LOS RADICALES SON UNOS. ES DECIR EL MÁXIMO VALOR DEL 1º MIEMBRO ES 3. PERO

VEAMOS QUE EL MÍNIMO VALOR DEL 2º MIEMBRO ES 4. OSEA QUE LA DESIGUALDAD SE VERIFICA $\forall x$ EN (α) .

$$\therefore C.S. = S = [0; \frac{1}{3}]$$

(11) DE $\sqrt{\frac{x^2-6x-x}{8-x}} > \sqrt[3]{x-10}$

PARA LOS RADICALES DE ÍNDICE PAR:

$$x^2-6x > 0 \wedge x > 0 \wedge \frac{x^2-6x-x}{8-x} > 0$$

$$(1) \quad (2) \quad (3)$$

DE (1): $x(x-6) > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 6$

DE (2): $x > 0$

DE (3): TENIENDO EN CUENTA S_1 y S_2 RESOLVAMOS (2 POSIBILIDADES):

(i) $\sqrt{x^2-6x-x} > 0 \wedge 8-x > 0$

$\vee$

(ii) $\sqrt{x^2-6x-x} \leq 0 \wedge 8-x < 0$

DE (i): $\sqrt{x^2-6x-x} > 0 \wedge x < 8$

$$\wedge x(x-7) > 0 \wedge x < 8$$

$$(x < 0 \vee x > 7) \wedge x < 8$$

INTERSECTANDO:

$$x < 0 \vee 7 < x \leq 8 \quad | S_i$$

DE (ii): $\sqrt{x^2-6x-x} \leq 0 \wedge x > 8$

$$\wedge x(x-7) \leq 0 \wedge x > 8$$

$$0 < x \leq 7 \wedge x > 8$$

INTERSECTANDO: $x \in \emptyset \quad | S_{ii}$

LUEGO: $S_3 = S_i \cup S_{ii}$

$$\Rightarrow S_3: x < 0 \vee 7 < x \leq 8$$

LUEGO, INTERSECTANDO S_1, S_2 y S_3

TENIENDO: $7 < x < 8 \vee x = 0$

$$\Rightarrow S = [7; 8) \cup \{0\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{CONDICIÓN} \\ \text{NECESARIA} \end{array} \right.$$

CON ESTO, ANALICEMOS EL SIGNO DEL 2º MIEMBRO, ASÍ:

$$7 < x < 8 \vee x = 0$$

RESOLTO 10: $-3 \leq x-10 \leq -2 \vee x-10 = -10$

LOCANDO 27:

$$-2\sqrt{3} \leq \sqrt[3]{x-10} \leq -\sqrt{2} \vee \sqrt[3]{x-10} = -\sqrt{10}$$

EL 2º MIEMBRO ES NEGATIVO.

NOTÉSE QUE $\forall x \in S$, EL 1º MIEMBRO ES (+) y EL 2º ES (-), VALIÉNDOSE ENTONCES, EL SENTIDO DE LA DESIGUALDAD, O SIMPLEMENTE, LA DESIGUALDAD SE VERIFICA $\forall x \in S$.

$$\therefore C.S. = [7; 8) \cup \{0\}$$

(12) DE $\frac{(x^2+x+1)(x-3)^2 \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[10]{x+3} \cdot \sqrt[2]{x+8} \cdot (x-7)^{11}} \leq 0$

PARA EL RADICAL DE ÍNDICE PAR:

$$x+3 > 0 \rightarrow x > -3 \quad (\alpha)$$

LOS: (x^2+x+1) ES (+) $\forall x \in \mathbb{R}$

MULTIPLICAMOS AMBOS MIEMBROS POR $\left(\frac{\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[10]{x+3} \cdot \sqrt[2]{x+8} \cdot (x-7)^{11}}\right)$; NOS QUEDARÁ:

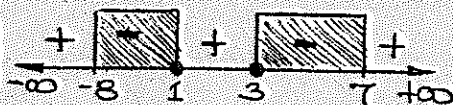
$$\frac{(x-3)^2 \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[10]{x+3} \cdot \sqrt[2]{x+8} \cdot (x-7)^{11}} \leq 0$$

AHORA, POR EL EXPONENTE E

ÍNDICES IMPARES, RESOLVER LA MISMA DESIGUALDAD, ES EQUIVALENTE A RESOLVER (SIEMPRE QUE EL 2º MIEMBRO SEA NULO):

$$\frac{(x-3)(x-1)}{(x+8)(x-7)} \leq 0$$

Por puntos críticos:

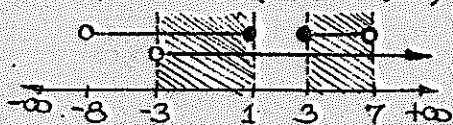


es: $-8 < x < -1 \vee 3 \leq x < 7$ (P)

Finalmente:

$$C.S. = (\alpha) \cap (\beta)$$

$$= \langle -3; +\infty \rangle \cap \langle -8; 1 \rangle \cup [3; 7)$$



$\therefore C.S. = \langle -3; 1 \rangle \cup [3; 7)$

(13) DE $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} < \sqrt{13-x} \dots (I)$

es: $x > 5 \wedge 13-x > 0$

$$x > 5 \wedge x \leq 13,$$

$$5 \leq x \leq 13 \quad (\alpha)$$

DE (I): $2 + \sqrt{x-5} < 13-x$

$$\sqrt{x-5} < 11-x$$

APLIQUE EL "RECUERDE" DE LA RESOLUCIÓN 103:

$$11-x > 0 \wedge x-5 < (11-x)^2$$

$$x < 11 \wedge x-5 < 121-22x+x^2$$

$$x < 11 \wedge x^2-23x+126 > 0$$

$$x < 11 \wedge (x-9)(x-14) > 0$$

$$x < 11 \wedge (x < 9 \vee x > 14)$$

INTERSECTANDO: $x < 9$ (P)

Luego:

$$C.S. = (\alpha) \cap (\beta)$$

$$= [5; 13] \cap \langle -\infty; 9 \rangle$$

$$\therefore C.S. = [5; 9)$$

(14) DE $\frac{4\sqrt{4-x} + 9\sqrt{x-1}}{8\sqrt{x-2}} > \sqrt{1-x} - 1$

es: PARA LOS RADICALES DE ÍNDICE PAR:

$$4-x > 0 \wedge x-1 > 0 \wedge x-2 > 0$$

$$x \leq 4 \wedge (x+1)(x-1) > 0 \wedge x > 2$$

$$x \leq 4 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \wedge x > 2$$

INTERSECTANDO: $2 < x \leq 4$ (P)

CON ESTO, EL 1º MIEMBRO ES (+).

ANALICEMOS EL SIGNO DEL 2º MIEMBRO CON ESTE INTERVALO:

$$2 < x \leq 4$$

• POR (-): $-4 \leq -x \leq -2$

• SUMO (I): $-3 \leq 1-x \leq -1$

• SACO 5: $-5\sqrt{3} \leq 5\sqrt{1-x} < -1$

• RESTO (I): $-5\sqrt{3} - 1 \leq 5\sqrt{1-x} - 1 < -2$

ESTO ES (-)

DESEA QUE LA DESIGUALDAD SE VERIFIQUE PARA TODO $2 < x \leq 4$

$$\Rightarrow C.S. = \langle 2; 4 \rangle$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = 2 \wedge b = 4$$

$$\therefore T = 2^2 + 4^2 = 20$$

(15) DE $\frac{4x^2+1+\sqrt{9-x^2}}{4x^2-1} > 1 \dots (I)$

Obs: $9-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 9 < 0$

$\rightarrow (x+3)(x-3) < 0 \rightarrow -3 < x < 3 \quad (\alpha)$

DE (I); DESDOLAMOS:

$\sqrt{9-x^2} > x \rightarrow \frac{\sqrt{9-x^2}}{4x-1} > 0$

Obs: $\sqrt{9-x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (\alpha)$

Así, SE DEBE CUMPLIR:

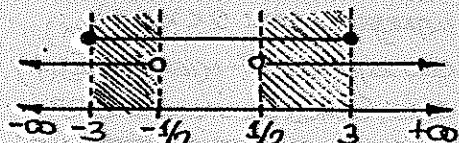
$4x-1 > 0 \rightarrow (2x+1)(2x-1) > 0$

DE DONDE: $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2} \quad (\beta)$

Luego:

Sol. = $(\alpha) \cap (\beta)$

$= [-3; 3] \cap \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$



$S = [-3; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 3]$

CON ESTO:

(I) es F; (II) es F; (III) es F

$\therefore FFF$

(116) DE $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1} > x-4$

Obs: $1-x > 0 \wedge x+1 > 0$

$x \leq 1 \wedge x > -1$

INTERSECTANDO: $-1 \leq x \leq 1 \quad (\alpha)$

CON ESTO, VEMOS EL SIGNO DEL 2º MIEMBRO.

Si $-1 \leq x \leq 1 \rightarrow -5 \leq x-4 \leq -3$
es (-)

OFEO QUE LA DESIGUALDAD SE VERIFICA $\forall x \in (\alpha)$, DADO QUE EL

1º MIEMBRO SIEMPRE SERA POSITIVO MIENTRAS QUE EL 2º ERA NEGATIVO.

$\Rightarrow C.S. = [-1; 1]$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$a = -1; b = 1$

LUEGO: $T = (-1+1)^{-1-1+2} = 0^0$

INDETERMINADO

(117) DE A: $\sqrt{x^2-x-2} > 1-x$

APLIQUEMOS EL "RECUERDE" DE LA RESOLUCIÓN 105.

(i) $1-x > 0 \wedge x^2-x-2 > (1-x)^2$

(ii) $1-x < 0 \wedge x^2-x-2 > 0$

DE (i): $x \leq 1 \wedge x^2-x-2 > 1-2x+1$

$x \leq 1 \wedge x > 3$

INTERSECTANDO: $x \in \emptyset \quad S_i$

DE (ii): $x > 1 \wedge (x+1)(x-2) > 0$

$x > 1 \wedge (x < -1 \vee x > 2)$

INTERSECTANDO: $x > 2 \quad S_{ii}$

Luego:

$C.S. = S_i \cup S_{ii}$

$= \emptyset \cup [2; +\infty)$

$\therefore C.S. = [2; +\infty)$

TERCER SEMINARIO TALLER DE ÁLGEBRA

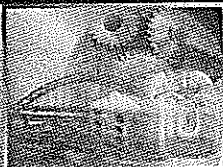
PRE-UNI 2005-II

CONTIENE:

- ① **INECUACIONES DIVERSAS**
- ② **VALOR ABSOLUTO**
- ③ **FUNCIONES DIVERSAS**
 - **DOMINIO Y RANGO**
 - **GRÁFICAS**



LIMA - PERÚ



01. Determine la suma de elementos del siguiente conjunto:
- $$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|6x - x^2| - 4}{4 - |x|} = -1 \right\}$$
- A) 5 B) 7 C) 8
D) 9 E) 12
02. Si A es un conjunto definido por:
 $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| + |x + 3| = 2\sqrt{x - x^2} \}$ y se proponen los siguientes enunciados.
- I. $n(A) = 3$
 II. $\exists x_1, x_2 \in A \mid x_1 + x_2 = 3/2$
 III. $\exists x \in A \mid x \in (0; 1/2)$
 Cuál(es) son correctos.
 A) solo I B) solo II C) solo III
 D) II y III E) I y III
03. Dados los siguientes enunciados:
 p. $|x^2 - 3x + 1| \leq |2x^2 - 4x + 2| + |-x^2 + 3x - 1|$.
 q. $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 0$ tiene 2 soluciones reales.
 r. Si $x > 0$ la ecuación $\frac{x^2}{|x|} + \frac{|x|}{x^2} = 1$ no tiene solución real.
 Cuál(es) son correctos.
 A) solo I B) solo II C) I y III
 D) II y III E) I, II y III
04. Si se cumple que:
 $|2x + b| + |y - b| + 3|b - 2| = 0$
 $x, y, b \in \mathbb{R}$, entonces determine:
 $T = x + y + 3b$.
 A) 6 B) 5 C) 4
 D) 3 E) 7
05. Determine la suma de los elementos del conjunto:
 $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 1|^2 + 3|2x - 5| + 3|x - 1| + 1 - x|2x - 5| \}$
- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4
06. Determine la suma de los valores enteros que satisfacen la inecuación:
 $|x - 2| + 2x \leq \sqrt{-x}$.
 A) 2 B) -10 C) 12
 D) -5 E) -7
07. Determine el conjunto solución de la inecuación:
 $|x^4 - 10| \leq |x^2|^2 + 8x^2$
 A) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
 B) $\emptyset$
 C) $\mathbb{R}$
 D) $(-\infty; -1]$
 E) $[1; +\infty)$
08. Al resolver la inecuación, el conjunto solución es $A = (a, \infty)$, entonces el valor de "a" es:
 $\frac{2 - |2 - x| - x}{|x - x^2| - 2} < 0$
 A) -5 B) -1 C) 0
 D) 2 E) 4
09. Si $|x| < 3$ entonces, $\frac{1}{m+6} < \left| \frac{1}{4-x} \right| < m$, luego de "m" se puede afirmar:
 A) $m < 1$ B) $m < 1/2$
 C) $m < 3/7$ D) $m \leq 1$
 E) $m \geq 1$
10. Sea $S = (a, b)$ el conjunto solución de:
 $|x + 1| + ||x| - 1| < \frac{2\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$
 determine el valor de $M = 4a^2 - 5b$.
 A) 4 B) 12 C) 16
 D) 20 E) 15

11. Si M es el conjunto solución

$$\text{de } \left| \frac{x^2 - 16}{x - 3} \right| + \frac{8(x + 4)}{9 - x^2} \leq 0, \text{ determine el}$$

cardinal del conjunto $M \cap \mathbb{Z}$:

($\mathbb{Z}$: conjunto de los números enteros)

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

12. Dado el conjunto S definido por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{|x| - 6} > 0 \Leftrightarrow |x - 1| + |x| > \sqrt{x} \right\} \text{ y}$$

dado los enunciados siguientes:

I. $\exists x \in S / |x + 1| = 7$

II. $\eta(S \cap \mathbb{N}) = 4$

III. $\{-2, 1\} \subset S$

Cuál(es) son correctos

A) solo I B) solo II C) solo III

D) I y II E) II y III

13. Dada la siguiente Inecuación:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 5}{3 - 2x^2 - 5x}} \geq (x - 4)|x + 5| \text{ determine}$$

el conjunto solución.

A) $(-3, 1)$ B) $(-3, 1/2)$ C) $\emptyset$

D) $(-1, 1/2)$ E) $(-3, 3)$

14. Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{2x + 7}{-x - 3}, x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 1)$$

entonces determine el rango de f .

A) $\emptyset$ B) $\mathbb{R} - \{1\}$ C) $\mathbb{R}$

D) $(-\infty, -9/4) \cup (-2, \infty)$ E) $(-2, \infty)$

15. Sea f la función definida por:

$$f(x) = x^2 - \frac{x^2 - x - 2 + |x + 2 - x^2|}{|x^2 - x - 2| + x + 2 - x^2}$$

Determine el $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$

A) $[0, 2)$ B) $(-1, 0]$ C) $(2, 4)$

D) $(-1, 4)$ E) $(-1, 1)$

16. Determine el dominio de la siguiente

$$\text{función } f(x) = \sqrt{\frac{5x}{x^2 - 9}}$$

A) $(-\infty, 2] \cup (2, \infty)$ B) $\emptyset$ C) $\mathbb{R}$

D) $(-3, 0] \cup (3, \infty)$ E) $(-\infty, 5] \cup (5, \infty)$

17. Sean f y g dos funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x f(x) & ; x \geq 2 \\ x - 2 + 2f(x) & ; x < 2 \end{cases} \text{ y } g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1};$$

$x \in \mathbb{R}$ y dados los siguientes enunciados:

I. $\text{Ran}(g) \subset (\text{Ran}(f) \cup \{0\})$

II. $\text{Ran}(f) - \text{Ran}(g) = [1; \infty)$

III. $\exists x \in A / \exists y \in A / x^2 + y^2 = \frac{1}{2};$

$A = \text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g)$

Cuál(es) son correctos

A) solo I B) solo II C) I y III

D) II y III E) I, II y III

18. Si f es una función definida

por $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}; x \in \mathbb{R}$, entonces

determine el valor de

$T = \max(f) + \min(f)$.

A) -2 B) -1 C) 0

D) 1 E) 2

19. Si f es una función definida por

$f(x) = \sqrt{25 - x^2} - 2$, entonces determine el $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$.

A) $[-5; 2]$ B) $[-5; 5]$ C) $[-5; -2]$

D) $[-2; 3]$ E) $[-3; 3]$

20. Sea f la función definida por

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = -|x + 1| - |x - 1|$$

determine el rango f .

A) $[-2, 0]$ B) $[-2, 0)$ C) $(-2, 0]$

D) $(-2, 0)$ E) $[0, 2]$

21. Sean f y g dos funciones, tales que:

$$f(x) = \sqrt{x + 1}, x \in [0; 8]$$

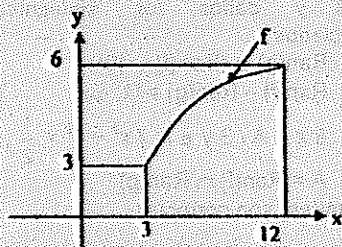
$$g(x) = 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 25}{x - 5}}, x \in [-4, 4]$$

determine $\text{Ran}(f) \cup \text{Ran}(g)$

A) $[1, 3]$ B) $[1, 2]$ C) $[2, 8]$

D) $[1, 4]$ E) $[2, 4]$

22. Dado el gráfico adjunto de la función f tal que $f(x) = a + \sqrt{x+b}$, $x \in [3; \infty)$ calcule $T = a \cdot b$.

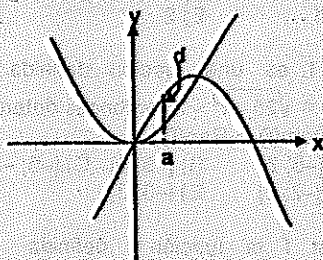


- A) 9 B) -9 C) 6
D) -6 E) 2

23. El gráfico adjunto corresponde a las funciones:

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

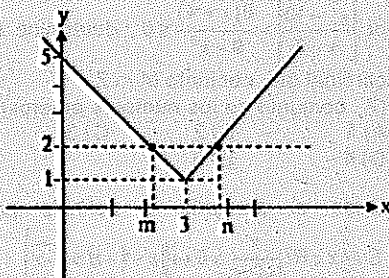
$$g(x) = 0,5x^2$$



si la máxima longitud vertical "d" se encuentra en la abscisa "a". Determine el valor de "a + d"

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$
D) 1 E) $\frac{4}{3}$

24. La figura adjunta representa a la gráfica de la función f , tal que $f(x) = a|x+b|+c$. Determine el valor de $n - m$.



- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{4}$

25. Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = |x+2| + |x-4|$$

$g(x) = 10 - |2x-3|$, entonces el área de las regiones que encierran sus gráficas es:

- A) 8 B) 6 C) 15
D) 16 E) 10

26. Determine el rango de la función f definido por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 14}; & -5 \leq x < 2 \\ -3 & ; 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

- A) $[-5; 2]$ B) $[1 + \sqrt{13}; 8] \cup \{-3\}$
C) $[4; 8] \cup \{-3\}$ D) $\langle 4; 6] \cup \{-3\}$
E) $\langle -5; 2] \cup \{-3\}$

27. Se define la función:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2x^2 - 7x + m - 11.$$

Determine $m + \beta$ si existe un único número real " β " tal que $f(\beta) = \beta$.

- A) 19 B) 21 C) 23
D) 25 E) 27

28. Sea f una función definida por

$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$. Si la gráfica de f intersecta al eje x en los puntos $(-2; 0)$, $(5; 0)$ y al eje y en el punto $(0; k)$, determine el rango de f :

- A) $[-10; \infty)$ B) $\left[-\frac{19}{2}; \infty\right)$
 C) $\left[-\frac{49}{6}; \infty\right)$ D) $\left[-\frac{49}{2}; \infty\right)$
 E) $\left[-\frac{49}{3}; \infty\right)$

29. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$f(ax + b) = a^2x^2 + 2abx + 1$$

$$f(bx - a) = 9x^2 - bx + c$$

Determine el valor de: $T = \frac{ab}{c}$, $a > 0$.

- A) $-\frac{18}{283}$ B) $-\frac{17}{283}$ C) $-\frac{16}{283}$
 D) $-\frac{15}{283}$ E) $-\frac{14}{283}$

30. Sea $f(x) = 2 - (x-1)^2$ con $x \in (0, 1)$

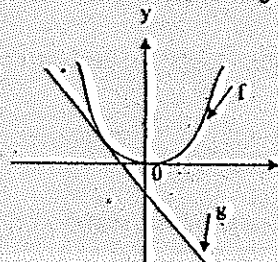
Si $h(x) = b \cdot f(x)$ y $f(x+b) = f(x)$

Determine el rango de h ; si $x \in (0, 1)$.

- A) $(0, 4)$ B) $(0, 4]$ C) $[2, \infty)$
 D) $\mathbb{R}$ E) $\emptyset$

31. En la figura se muestran las gráficas

de las funciones: $f(x) = \frac{x^2}{8}$; $g(x) = -x - m$



Determine el valor de "m"

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 2 E) -2

32. La entrada a un edificio tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 metros de alto en el centro y 6 metros en el ancho de la base. Si hay que introducir un objeto de 8 metros de alto. ¿Cuál es el ancho máximo que puede tener dicho objeto?

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

33. La función $h(t) = 2a^2t^2 - t^4 + b - a^4$, con $b - a^4 > 0$ representa fórmula de crecimiento de una población de conejos en un ambiente con recursos limitados, en función del tiempo t en años ($a > 0$). Calcule el valor de t para que la población sea máxima.

- A) $t = 1$ B) $t = a$ C) $t = a^2$
 D) $t = b - a$ E) $t = b$

34. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / $f(x) = \left(\frac{a}{3} - 5\right)x^2 + \left(\frac{b}{4} - 3\right)x + \frac{c}{5} - b$

Si las imágenes son igual que las preimágenes en todo su recorrido; determine el valor de: $a + b + c$

- A) 111 B) 121 C) 131
 D) 141 E) 151

35. Dados los siguientes enunciados:

I. $f(x) = x - \frac{x^3}{11} + \frac{x^5}{2}$, es función impar.

II. $g(x) = \sqrt[5]{(1-x)^4} + \sqrt[5]{(1+x)^4}$ es función par.

III. $P(x) = \sqrt{1+x-x^2} - \sqrt{1-x-x^2}$ es función impar.

Cuál(es) son correctos

- A) solo I B) I y II C) solo II
 D) I y III E) I, II y III

36. Con respecto a las funciones

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$$

$$g(x) = 2|x| - x^2$$

Podemos decir que:

- A) f y g son pares.
 B) f y g son impares.
 C) f y g no son pares ni impares
 D) f es impar, g es par.
 E) f es par, g es impar.

37. Sea
- $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
- ;
- $x \in \mathbb{R}$
- ,
- $a_0 \neq 0$
- ,
- $n \in \mathbb{Z}^+$
- ,
- $a_i \in \mathbb{R}$
- , y dados los siguientes enunciados:

- I. $f(x)$ es una función par.
 II. $f(x)$ es una función impar.
 III. $f(x)$ siempre se puede expresar como la suma de una función par y otra impar.

Cuál(es) son correctos:

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y II E) II y III

38. Dada la función f definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - |x|^2 & ; |x| \leq 1 \\ \frac{2}{|x|} & ; |x| > 1 \end{cases}$$

y dados los siguientes enunciados:

- I. Es una función par.
 II. Es una función impar.
 III. Es función decreciente en $(0; +\infty)$.

Cuál(es) son correctos:

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y II E) I y III

39. Dada la función f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & ; x \geq 2 \\ 2-|x| & ; |x| < 2 \\ x^2-4 & ; x \leq -2 \end{cases}$$

y dados los siguientes enunciados:

- I. f es función decreciente en $(-\infty; -2)$
 II. f es función creciente en $(-2; 2)$.
 III. f es función decreciente en $(0; 2)$.

Cuál(es) son correctos:

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y II E) I y III

40. Se define la función f como:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}, \text{ de los siguientes}$$

enunciados:

- I. $\text{Ran}(f) = [-1; 1/3]$
 II. f es función decreciente, $\forall x \in (1; \infty)$
 III. f es función creciente en $(-1; 1)$
 Cuál(es) son correctos.

- A) I, II, III B) I, II C) II y III
 D) solo I E) I, III

41. Dado los siguientes enunciados:

- I. $f(x) = 2x - 3$ es función creciente.
 II. $f(x) = 5 - x$ es función decreciente.
 III. $f(x) = ax + b$ es función creciente para $a > 0$ y es función decreciente para $a < 0$.

Cuál(es) son correctos.

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I, II y III E) I y III

42. Dado los siguientes enunciados:

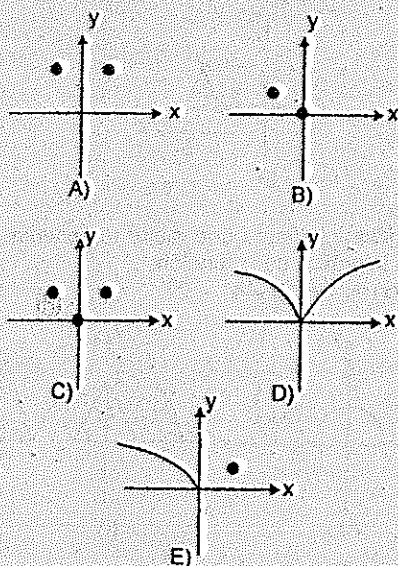
- I. Si f es función no decreciente, entonces f es función creciente.
 II. Si f es función decreciente, entonces f es función no creciente.
 III. $f(x) = x + \sqrt{x+1}$, $x \in (1; 2)$ es función creciente.
 IV. $g(x) = -x^2$ es función monótona
 V. $h(x) = 2x^3$ es una función monótona

Cuántos son correctos:

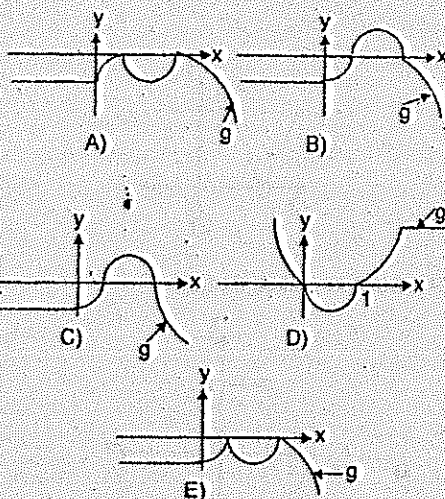
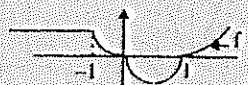
- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

43. Si la gráfica de f(x) es descrita por:

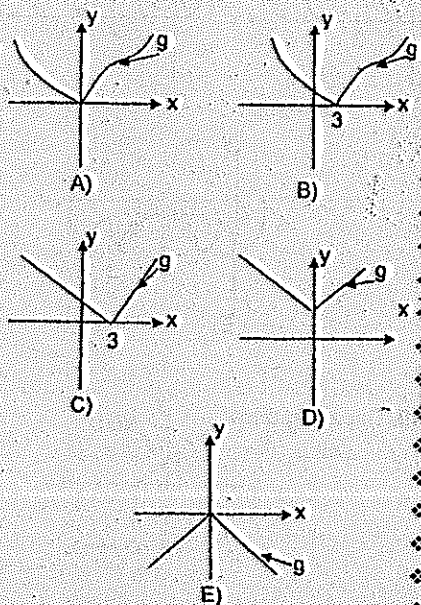
determine la gráfica de $g(x) = f(-|x|)$.



45. Graficar $g(x) = f(1-x)$, si la gráfica de f es:



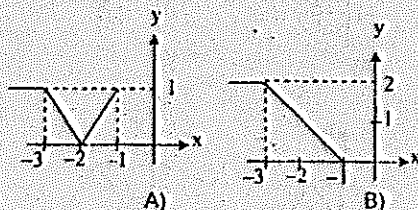
44. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 0 \\ x^3; & x \geq 0 \end{cases}$. La gráfica de $g(x) = |f(x-3)|$ es:

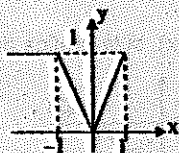


46. Se define la función f mediante:

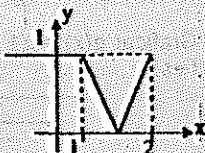
$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \geq 1 \\ 2x & ; x \in [0, 1) \end{cases}$$

Determine la gráfica de $h(x) = |-1 + f(2-x)|$

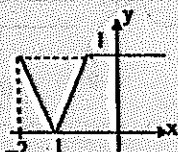




C)

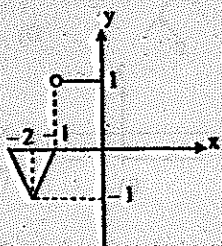


D)

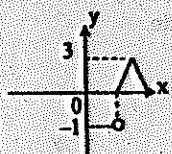


E)

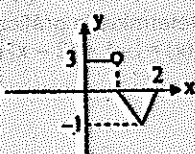
47. Dada la gráfica de $f(x)$



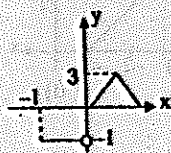
que gráfica representa mejor:
 $g(x) = 2 - f(-x)$



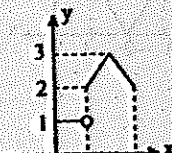
A)



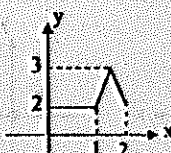
B)



C)



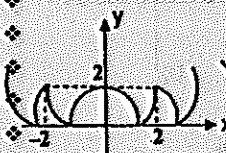
D)



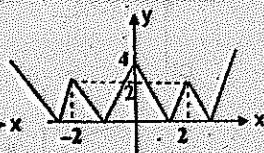
E)

48. Indique la figura que mejor representa a la gráfica de la función:

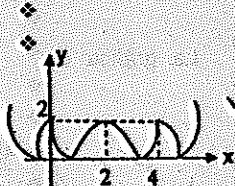
$$f(x) = ||x| |x - 4| - 2|$$



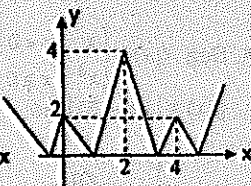
A)



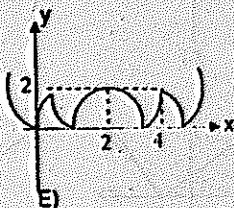
B)



C)

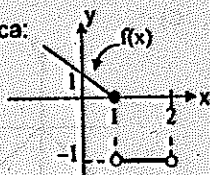


D)



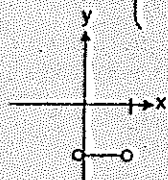
E)

49. Dada la gráfica:

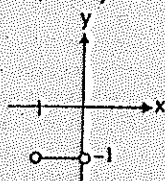


Obtener la gráfica de

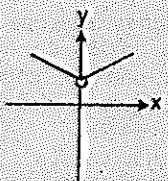
$$f\left(-1 + \frac{|2|-x+|x^2|}{|-x|}\right)$$



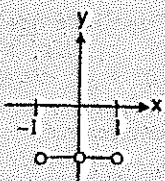
A)



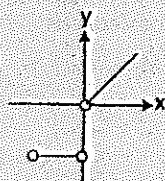
B)



C)



D)



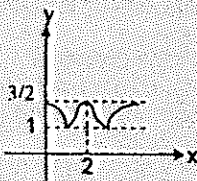
E)

50. Si f es una función definida por:

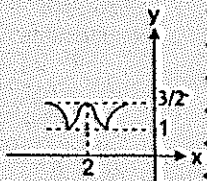
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}, \text{ entonces la figura}$$

que mejor representa la gráfica de:

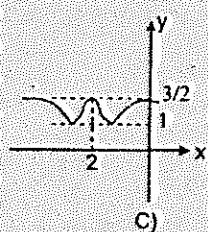
$$g(x) = \left| f(x+2) - \frac{1}{2} \right| + 1$$



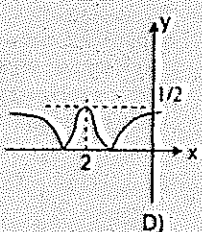
A)



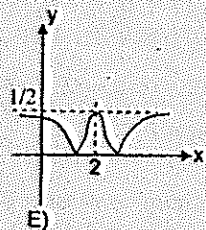
B)



C)



D)



E)

51. Dadas las funciones:

$$f = \{(-3; 2); (0; 0); (2; 4); (3; -1); (4; 3)\}$$

$$g = \{(2; 0); (3; 4); (4; 7); (6; 2)\}$$

Calcule la suma de los elementos del rango de la función: $f^2 + 3g$

A) 58

B) 59

C) 60

D) 61

E) 57

52. Si f y g son dos funciones definidas mediante

$$f(x) = \sqrt{x+4}; |x| \leq 4$$

$$g = \{(-3; 0); (1; 4); (2; 3); (-2; -2); (-1; -3); (3; 4)\}$$

Entonces $\left(\frac{1}{f^2 + g}\right)(3)$ es:

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{11}$

D) -1

E) 1

53. Dada las funciones:

$$f = \{(-3; 4); (-2; 0); (2; 0); (3; 2); (4; 6); (7; 5)\}$$

$$g(x) = 3x + 5; x \in (-\infty; 4);$$

halle $\max(P) + \min(Q)$

$$\text{Si } P = \{a + b / (a; b) \in f + g\}$$

$$\text{y } Q = \{a + b / (a; b) \in f - g\}$$

A) 10

B) 15

C) 20

D) 32

E) 25

54. Se define las funciones f y g de la siguiente forma:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2)$$

$$g(x) = \operatorname{sgn}(x - 2)$$

Halle el rango $f + g$.

$$\text{Si } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$

- A) $\{-1, 0, 1\}$ B) $\{0, 1\}$ C) $\{-2, -1\}$
D) $\{-1, 0, 2\}$ E) $\{-2, -1, 0, 2\}$

55. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1; & 0 \leq x < 3 \\ 1; & 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Determine el valor de $f\left(\frac{x^2}{2}\right) + f(2x + 5)$

donde $x \in [-1, 2]$.

- A) $-x^2$ B) x^2 C) $x^2 - 2$
D) $x^2 + 2$ E) 0

56. Dado los siguientes enunciados:

- I. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función creciente, g función constante entonces $f + g$ es función creciente.
- II. Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función par, entonces $g(x) = h(|x|)$, es función par.
- III. Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función impar, entonces $h(x) = g(-x)$ es función impar.

Cuál(es) son correctos.

- A) I y II B) solo III C) I y III
D) solo II E) I, II y III

57. Dados los siguientes enunciados:

- I. Si f y g son funciones impares, entonces $f + g$ es función impar.
- II. Si f y g son funciones impares, entonces, $f \cdot g$ es función impar, siempre y cuando $\operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g) \neq \emptyset$.
- III. Si f es función creciente entonces puede ser una función impar.

Cuál(es) son correctos:

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

58. Sea f una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x + 1, & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

Si $x \in [1, 3/2]$ con respecto a la función: $g(x) = f(2x - 1) - f(2x^2)$ la alternativa correcta es:

- A) Es función constante.
B) Es función creciente.
C) Es función decreciente.
D) Es función impar.
E) Es función par.

59. Sean f y g dos funciones definidas en $[a; b]$ con rangos contenidos en $(0; +\infty)$ siendo el primero función creciente y el segundo función decreciente:

$$\text{Si } M = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n)} \text{ y}$$

$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, entonces la alternativa correcta es:

- A) $\frac{f}{g}(x_1) > M > \frac{f}{g}(x_n)$
B) $\frac{f}{g}(x_1) < M < \frac{f}{g}(x_n)$
C) $\frac{f}{g}(x_1) < M < \frac{g}{f}(x_n)$
D) $M < \frac{f}{g}(x_1) \cdot \frac{f}{g}(x_2)$
E) $M > \frac{f}{g}(x_1) \cdot \frac{f}{g}(x_2)$

60. Si f es una función creciente, g una función decreciente y h una función constante y dados los siguientes enunciados:

- I. $f - 2g$ es función creciente.
- II. $-h \cdot g + f$ es función creciente.
- III. $h + g$ es función decreciente.

Cuál(es) son correctos:

- A) I y II B) II y III C) I y III
D) solo I E) I, II y III

61. Sea f una función definida por:

$$f(x-a) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$
 entonces con respecto a la función h , definida por:
 $h(x) = f(x-1) + f(x-2)$ la alternativa correcta es:
 A) Es función constante.
 B) $f = h$.
 C) h es función impar y par.
 D) Es función no decreciente en $[0, \infty)$.
 E) Es función decreciente y creciente en R .
62. Sean las funciones: $h, f, g: R \rightarrow R$, definidas por: $f(x) = |x| - 2$ y $g(x) = 4 - x^2$ y

$$h(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$
 determine el $\text{Dom}(h) \cap \text{Ran}(h)$:
 A) $[-2, 2]$ B) $(-\infty, -2]$ C) $[0, 2]$
 D) $[0, \infty)$ E) $[2, \infty)$
63. Sean f y g dos funciones, definidas por: $f = \{(x, \sqrt{x-1}) \mid x \in [1, \infty)\}$ y $g = \{(2, -5), (0, 1), (-4, 6), (8, -3), (-7, 10)\}$ determine el número de elementos de $f \circ g$.
 A) 1 B) 0 C) 2
 D) 3 E) 4
64. Si f es una función creciente y g es una función decreciente, de los siguientes enunciados:
 I. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $af + bg$ es función creciente.
 II. $f \circ g$ es función creciente.
 III. $f \cdot g$ es función creciente.
 IV. $g \circ f$ es función decreciente.
 Cuál(es) son correctos:
 A) solo IV B) I, II y III C) I y III
 D) II y IV E) I y IV
65. Si $g = \{(-2, 0), (-1, 3), (2, 1), (3, -2), (4, 2), (5, 0)\}$ y $h(x) = x^2 + 2, x \in Z$, calcule la suma de los elementos del rango de $g \circ h$.
 A) -2 B) -3 C) 2
 D) 0 E) -1
66. Sea $f(x) = x^2 - 1, x \in [-1, 2]$
 $g(x) = 3x - 1; x \in (-3, 1]$
 Determine $\text{Dom}(f \circ g)$
 A) $[0, 1]$ B) $\{-1, 0\}$ C) $\{-1, 1\}$
 D) $[0, 1/2]$ E) $\{-1, 1\}$
67. Dadas las funciones:
 $f(x) = 4|x| - x^2; -8 < x < 1$
 $g(x) = \sqrt{1-x}; -4 < x < 0$
 Halle el rango de la función $g \circ f$.
 A) $\{-1, 2\}$ B) $\{-3, 5\}$ C) $\{2, 3\}$
 D) $\{1, \sqrt{5}\}$ E) $\{-2, 6\}$
68. Si $f(x) = \sqrt{2x-1}; h(x) = \sqrt{2x^2-7}$ entonces determine una función g tal que la función $(f \circ g)(x) = h(x)$.
 A) $g(x) = x^2 - 31$ B) $g(x) = x^2 + 3x + 3$
 C) $g(x) = x^2 - 3$ D) $g(x) = x + 3$
 E) $g(x) = x - 3$
69. Sean las funciones: $f = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 10)\}$
 $g(x) = \sqrt{x+2}, x \in \{-2, 2\}$, calcule el número de elementos del rango de la función $g \circ f$.
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5
70. Sean f y g dos funciones definidas por:
 $f(x) = 2x + 1; (x^2 + 1)(x - 2) < 0$
 $g(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x < 0 \\ -4x, & x > 1 \end{cases}$
 Cuál(es) son correctos de los siguientes enunciados:
 I. $5 \in \text{Ran}(f \circ g)$
 II. $1 \in \text{Dom}(f \circ g)$
 III. $(f \circ g)(8) = -63$
 A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y II E) I y III

71. Si f y g son dos funciones, tales que
 $f(x) = 5x + m$, $g(x) = 3x - m$, y
 $(f \circ g)(x) + 4 = (g \circ f)(x) - (f - g)(m)$,
 entonces m es:

A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

72. Si g es una función estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$ tal que:

$$f \circ g = \{(x; 2x^2 - 12x + 21) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$f = \{(x; 2x^2 + 3) / x \in \mathbb{R}\}$$
 halle la función $g(x)$.

A) $g(x) = -x + 3$ B) $g(x) = -2x + 1$
 C) $g(x) = -3x - 1$ D) $g(x) = -x + 2$
 E) $g(x) = -2x - 2$

73. Sea las funciones f, g definidas por:
 $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x + 3$, halle
 $\text{Dom}(f \circ g) \cap \text{Ran}(f \circ g)$

A) $(-\infty; -1]$ B) $(0; 4)$ C) $[0; +\infty)$
 D) $[0; 3/5]$ E) $(0; 3/2]$

74. Dada la función g_k , $k \in \mathbb{N}$ definida por:

$$g_1(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$g_k(x) = (g_1 \circ g_{k-1})(x); \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$
 halle $g_3(3)$.

A) $\frac{11}{27}$ B) $\frac{11}{25}$ C) $\frac{3}{5}$
 D) $\frac{4}{25}$ E) $\frac{7}{27}$

75. Sean f y g dos funciones definidas por:
 $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = x + a$; determine
 el valor de " a " de modo que:
 $(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a - 1)$.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 3
 D) 4 E) $-\frac{8}{7}$

76. Sean f y g dos funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 + 1; x \in (0; 2\sqrt{2})$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2|x|}; x \in [2; 5)$$

- Si A y B son conjuntos que representan el dominio y rango de f o g respectivamente, entonces el conjunto $A \cap B$ es:

A) $[2; 2\sqrt{2}]$ B) $(1; 5)$ C) $(2; 4)$
 D) $[2\sqrt{2}; 9]$ E) $(2; 8]$

77. Si f y g son dos funciones definidos por: $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $x \in [0; 6)$ y

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}; x \in [0; 2)$$
 entonces el dominio de la función $g \circ f$, es:

A) $(0; 2)$ B) $[0; 2)$ C) $[0; 1)$
 D) $(0; 1)$ E) $[0; 6)$

78. Se definen las funciones f y g por:
 $f: [-4; \infty) \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2x(x - 2) + 8$
 $g: (-\infty; 4] \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = 2(-x^2 + 2)$

- Determine el rango de la función $h(x)$, definida mediante:

$$h(x) = ((f(x) \circ f(x)) + (g(x) \circ f(x)) - ((f(x) \circ g(x)) - (g(x) \circ g(x)))$$

A) $[-4; 0]$ B) $[2; 4]$ C) $[-2; 4]$
 D) $[-4; 2]$ E) $[-4; 4]$

79. Sean f y g funciones definidas por:
 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, M y N es el número de proposiciones verdaderas y falsas respectivamente, determine la relación entre M y N .

- I. Si f y g son funciones inyectivas entonces $f + g$ es una función inyectiva.

- II. Si f y g son funciones inyectivas, $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones inyectivas.

- III. Si f es función inyectiva, entonces $|f|$ nunca es función inyectiva ($|f|(x) = |f(x)|$).

- IV. Si g es función inyectiva, entonces g^2 nunca es función inyectiva.

- V. Si $f \circ g$ es función inyectiva, entonces g es función inyectiva.

A) $M = 2N - 4$ B) $N = 2M - 4$
 C) $N = 4M$ D) $M = 4N$
 E) $M > N$

80. Se define la función $f: (-2; +\infty) \rightarrow B$

$$\text{tal que } f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{5} - \frac{7}{5}, & -2 < x \leq 3 \\ \frac{x}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

Determine B para que f sea suryectiva:

- A) $[-5; 1) \cup (1; +\infty)$
 B) $(1; +\infty)$
 C) $(-5; -1) \cup (1; +\infty)$
 D) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$
 E) $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$

81.Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Si $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$.
 II. Si f y g son funciones inyectivas entonces $g \circ f$ es función inyectiva.
 III. Si g y f son funciones inyectivas entonces $f \circ g$ es función inyectiva.
 A) I y II B) II y III C) I, II y III
 D) solo I E) solo II

82. Se define la función f de modo que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: f(x+y)f(x-y) = 1 + 2x + f(x^2) - f(y^2)$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son falsos:

- I. Las dos funciones que verifican la condición son funciones inyectivas.
 II. Existe solo una función, que cumple la condición y no es función inyectiva.

III. Si f es única entonces $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ es función inyectiva.

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y III E) I, II y III

83. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Si $f: [a; b] \rightarrow [-1; 3]$ / $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ es función biyectiva, entonces $a + b = 28$
 II. Si $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$, $x \in [3; 5]$, entonces f es función inyectiva.
 III. Si $g = \{(-3; 2), (-1; 4), (0; 3), (2; -3), (4; -1)\}$, entonces g es función biyectiva
 A) I, II y III B) solo III C) solo II
 D) solo I E) I y III

84. Se define la función suryectiva f mediante:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B} \text{ tal que } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Determine el conjunto B.

- A) $[-\frac{1}{2}; 0]$ B) $(-1; 0)$ C) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$
 D) $(0; 1]$ E) $(0; \frac{1}{2}]$

85.Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos si: $f(x) = \frac{2x}{5x-2}$

- I. f es función biyectiva en todo su dominio
 II. $f(f(x))$ es función biyectiva
 III. $f(f(f(x)))$ es función biyectiva
 A) I, II y III B) I y II C) I y III
 D) II y III E) solo II

86. Se define la función f suryectiva mediante: $f: A \rightarrow [1; \infty)$ tal que

$$f(x) = \frac{x}{|x|} (x^2 - 2|x| + 3); \text{ determine el}$$

conjunto A si $A \cap (0, 1) = \emptyset$

- A) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
 B) $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$
 C) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
 D) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
 E) $[1, \infty)$

87. Se define las funciones f, g y h tal que

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = |x - 6|$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = x^2 - 9$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = x + 20$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. f es función inyectiva.

II. g es función inyectiva.

III. h es función biyectiva.

A) solo I B) solo II C) solo III

D) I y II E) I, II y III

88. Se define la función f , mediante:

$$f: \left[\frac{21}{4}, \frac{11}{2} \right] \rightarrow [-1, 1] / f(x) = \frac{16-3x}{x-5}$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos

I. f es función suryectiva.

II. f es función creciente $\forall x \in \left[\frac{21}{4}, \frac{11}{2} \right]$

III. f no tiene función inversa.

A) solo II y III B) sólo II C) sólo I

D) solo III E) I y II

89. Se define la función f de modo que:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x^2) - f(y^2) + 2x + 1 = f(x+y)f(x-y)$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Solo existen dos funciones que cumplen la condición.

II. f es función inyectiva en todo su dominio.

III. Si f^* es la función inversa:

$$f(x) + f^*(x) = 2x$$

A) solo I B) I y II C) II y III

D) solo II E) solo III

90. Se define la función f por:

$$f = \{(x; (x-2)(4-x)) / x < 3\}$$

determine la función f^* , si existe.

$$A) f^* = \{(x; 3 - \sqrt{1-x}) / x < 1\}$$

$$B) f^* = \{(x; 4 - \sqrt{2-x}) / x < 2\}$$

$$C) f^* = \{(x; 2 - \sqrt{1-x}) / x < 1\}$$

$$D) f^* = \{(x; 4 - \sqrt{3-x}) / x < 3\}$$

E) No admite inversa

91. Se definen las funciones f y g :

$$f = \{(3; 1), (2; 3), (5; 2), (7; 4)\}$$

$$g = \{(2; 3), (7; 5), (9; 7), (11; -4)\}$$

Determine la función $(f \circ g)$ o f^*

$$A) \{(2; 3), (7; 5), (9; 7)\}$$

$$B) \{(1; 3), (2; 4)\}$$

$$C) \{(3; 2)\}$$

$$D) \{(3; 1), (2; 4)\}$$

$$E) \{(3; 1), (4; 2)\}$$

92. Se define la función f mediante:

$$f(x) = 2x + c; f(c) = 2f(c^2); c \neq 0.$$

determine el valor de $E = \frac{f(1)}{f^*(1)}$

$$A) -8 \quad B) -4 \quad C) -3$$

$$D) -2 \quad E) -1$$

93. Determine la función inversa $f^*(x)$,

si se define la función f , por

$$f(x) = x^2 + 4x - 1; x \in (-4; -3)$$

$$A) f^*(x) = -2 - \sqrt{x+5}$$

$$B) f^*(x) = -2 + \sqrt{x+5}$$

$$C) f^*(x) = 2 + \sqrt{x+5}$$

$$D) f^*(x) = 2 - \sqrt{x+5}$$

$$E) f^*(x) = -1 - \sqrt{x+5}$$

94. Se define la función f mediante:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

Determine la regla de correspondencia de la función f^* si existe.

$$A) f^*(x) = \frac{x^2 - 2x}{3} \quad B) f^*(x) = \frac{6x + 81}{5}$$

$$C) f^*(x) = \frac{x^3 - 3x}{2} \quad D) f^*(x) = \frac{x - 1}{3}$$

$$E) f^*(x) = \frac{x^4 - 3}{5}$$

95. Se definen las funciones g y h

mediante:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = px + 4$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = 5x - 3$$

Determine el valor de p que satisface

la condición $h^*(g^*(px)) = \frac{x}{5}$.

A) $\frac{4}{3}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{6}{7}$

E) $\frac{1}{4}$

96. Se definen las funciones f y g

mediante: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y

$g = \{(2; 4), (5; 3), (-6; 8), (0; 2), (-1/2; 5)\}$.

Determine el valor de: $(\log^*)(3)$.

A) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{24}$

C) $\sqrt{35}$

D) $\sqrt{5}$

E) $-\sqrt{35}$

97. Se define la función

$f = \{(x, y) / y = x^2 - 1, x \leq 0\}$.

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. $\text{Ran}(f) = \{1; \infty\}$

II. $f^*(2a) = -\sqrt{2a+1}$

III. $\text{Dom}(f/f^*) = \{-1; 0\}$

A) solo I

B) solo II

C) II y III

D) I y II

E) I, II y III

98. Se definen las funciones f y g

mediante:

$f(x) = 2x + m$ y $g(x) = mx, m \neq 0$

y la función compuesta por

$(g \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 1$, determine m

A) 1

B) -1

C) 0

D) 1/2

E) 4

99. Se define la función f por:

$f(x) = x + \sqrt{x+1}, x \geq 3$, determine la función $f^*(x)$.

A) $f^*(x) = \frac{2x-1+\sqrt{4x+5}}{2}$

B) $f^*(x) = \frac{2x+1-\sqrt{4x+5}}{2}$

C) $f^*(x) = \frac{2x-1-\sqrt{4x+5}}{2}$

D) $f^*(x) = \frac{2x-1-\sqrt{4x+1}}{2}$

E) $f^*(x) = \frac{2x-1+\sqrt{4x-1}}{2}$

100. Se definen las funciones f y g

mediante: $f = \{(0; 0), (1; 0), (2; 1),$

$(3; 2), (4; 3)\}$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$,

$x \in (-3; 3)$, determine "a + b", si

$(g^2 \circ f)(a) = 3$ y $(g^2 + f^*)(6) = b$

A) 2

B) 3

C) -1

D) 0

E) 8

101. Se definen las funciones f y g

mediante:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -1/2x + m$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = (m-1)x - 1$ y sea

la función compuesta definida por:

$(g^2 \circ f)^*(x) = -8x + 12$

Determine el valor de "m"

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

102. Sean f, g y h tres funciones,

cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $f(x) = -x^2, x < 0$ entonces

$f^*(x) = -\sqrt{-x} \wedge x < 0$.

II. $g(x) = \frac{2x}{x-1}, x \neq 1$ entonces

$g^*(x) = \frac{x}{x-2} \wedge x \neq 2$.

III. $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x-3}, x \leq -\frac{1}{2}$.

entonces $h^*(x) = x^2 + x + 1 \wedge x > \frac{3}{4}$.

A) solo I

B) solo II

C) I y II

D) I, II y III

E) solo III

103. Se define la función f mediante

$f(x) = \frac{x}{|x|+1}, x \in \mathbb{R}$, entonces la

función $h(x) = (f + f^*)(x)$ si existe es:

A) $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}; x \in (-2; 2)$

B) $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}; x \in (-1; 1)$

C) $h(x) = \frac{2|x|}{1+|x|}; x \in (-1; 1)$

D) $h(x) = \frac{1-x^2}{2x}; x \in (-1; 1)$

E) $(f + f^*)(x)$ no existe

104. Se define la función f mediante $f(x) = -x^2 - 6x - 1, x \in [-6; -4]$, determine la función $f^*(x)$

A) $f^*(x) = -3 - \sqrt{8+x}; x \in [-1; 7]$

B) $f^*(x) = -3 + \sqrt{8-x}; x \in [-1; 7]$

C) $f^*(x) = 3 - \sqrt{8-x}; x \in [-1; 7]$

D) $f^*(x) = -3 - \sqrt{8-x}; x \in [-1; 7]$

E) $f^*(x) = 3 + \sqrt{8+x}; x \in [-1; 7]$

105. Se definen las funciones f y g por:

$f(x) = 2x + a$

$g(x) = ax; a \neq 0$

Si $(g \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 1$; determine "a"

A) 1 B) -1 C) 0

D) $\frac{1}{2}$ E) 4

106. Se definen las funciones f y g por:

$f = \{(1; 2), (2; 2), (3; 7), (5; 6)\}$

$g = \{(-2; 0), (0; 0), (4; 1), (8; 3), (9; 5)\}$

Obtenga $(f \circ g)^*$ e indique su dominio

A) $\{4; 8; 9\}$ B) $\{2; 4; 6\}$

C) $\{2; 6; 7\}$ D) $\{1; 5; 7\}$

E) $\{1; 2; 3\}$

107. Se define la función f mediante

$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$; determine el valor de

$(f + f^*)\left(\frac{1}{2}\right) + (f - f^*)\left(-\frac{1}{2}\right)$

A) -2 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{4}{3}$ E) 2

108. Determine la función f^* si existe

para $f(x) = \frac{|x+4|}{|x-1|-1}, x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$

A) $f^*(x) = \frac{4}{1-x}$ B) $f^*(x) = \frac{-4}{x+1}$

C) $f^*(x) = \frac{2}{2x-1}$ D) $f^*(x) = \frac{4}{x-1}$

109. Se define la función f tal que:

$f(x+5) = \frac{1}{x+2}$, determine el valor de x

que satisface la relación $(f^* \circ f)(4/x) = 2$.

A) 3 B) 2 C) 4

D) 5 E) 8

110. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$ dos funciones, cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si f es función creciente entonces f^* es función creciente.

II. Si g es función decreciente entonces g^* es función creciente.

III. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, para toda función f y g .

A) solo I B) solo II C) solo III

D) I y III E) II y III

111. Se define la función h mediante:

$h(x) = 3x + 2\alpha$

$h^*(\alpha + 2) = h(\alpha^2)$.

Determine los valores del producto de α .

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $-\frac{2}{9}$

D) -1 E) 0

SOLUCIONARIO

3^{er} SEMINARIO - TALLER

ALGEBRA

① DE A: $4 - |x| \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 4$

Luego: $|6x - x^2| - x = -x + |x|$

$\rightarrow |6x - x^2| = |x|$; DE AQUÍ:

$6x - x^2 = x \vee 6x - x^2 = -x$

$x(x-5) = 0 \vee x(x-7) = 0$

$(x=0 \vee x=5) \vee (x=0 \vee x=7)$

$\Rightarrow A = \{0; 5; 7\}$

$\therefore \Sigma \text{ DE ELEM. DE A} = \underline{12}$

② DE A: $x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(x-1) \leq 0$

DE AQUÍ: $0 \leq x \leq 1$ CONDICIÓN NECESARIA

CON ESTO ANALIZAMOS EL SIGNO DE LOS CANTIDADES DENTRO DE LAS BARRAS.

$+ - 2 \leq x - 2 \leq -1 \rightarrow |x-2| = 2-x$

$+ 3 \leq x+3 \leq 4 \rightarrow |x+3| = x+3$

$+ - 1 \leq x-1 \leq 0 \rightarrow |x-1| = 1-x$

$+ 4 \leq x+4 \leq 5 \rightarrow |x+4| = x+4$

EN LA ECUACIÓN:

$|2x + x+3| - |1-x-x-4| = 2\sqrt{x-x^2}$

$5 - |2x-3| = 2\sqrt{x-x^2} \rightarrow 5 - |2x+3| = 2\sqrt{x-x^2}$

COMO $0 \leq x \leq 1 \rightarrow 3 \leq 2x+3 \leq 5$

$\rightarrow |2x+3| = 2x+3$

$\Rightarrow 5 - (2x+3) = 2\sqrt{x-x^2}$

DE AQUÍ: $1-x = \sqrt{x-x^2}$

• AL $\square$: $(1-x)^2 = x(1-x)$

$(1-x)^2 - x(1-x) = 0 \rightarrow (1-x)(1-2x) = 0$

DE DONDE: $x = 1 \vee x = 1/2$

LUEGO: $A = \{1; 1/2\}$

CON ESTO: (I) ES F; (II) ES V; (III) ES F

$\therefore$ SÓLO (II) ES CORRECTA

③ OBJ: $|x^2 - 3x + 1| = |-x^2 + 3x - 1|$

$\Rightarrow p: |x^2 - 3x + 1| \leq |2x^2 - 4x + 2| + 2$

$\rightarrow |2x^2 - 4x + 2| \geq 0$

¡ESTO SE VERIFICA $\forall x \in \mathbb{R}$!

$\rightarrow p \text{ ES V}$

$q: \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 0 \rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$\rightarrow (2x+1)^2 = 0 \rightarrow x = -1/2$

$\rightarrow \text{C.S.} = \{-1/2\} \Rightarrow q \text{ ES F}$

$r: \text{SI } x > 0 \rightarrow \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = x + \frac{1}{x} = 1$

DE AQUÍ: $x^2 - x + 1 = 0$

DE DONDE: $x \notin \mathbb{R} \Rightarrow r \text{ ES V}$

$\therefore$ SON CORRECTOS (I) y (III)

④ COMO $|a| \geq 0 \forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ LA ÚNICA POSIBILIDAD PARA QUE

$|2x+b| + |y-b| + 3|b-2| = 0$

ES: $\frac{0}{0} + \frac{0}{0} + \frac{0}{0}$

OBJ: $+ 2x+b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2}$

$+ y-b = 0 \rightarrow y = b$

$+ b-2 = 0 \rightarrow b = 2$

OSEA QUE: $x = -1; y = 2$

$\therefore T = x+y+3b = \underline{7}$

5) Obs: $|x-1| = |1-x|$

DE M: TRANSPOSICIÓN TÉRMINOS

$$|x-1|^2 - 3|x-1| = |x-1| |2x-5| - 3|2x-5|$$

$$|x-1|(|x-1|-3) = |2x-5|(|x-1|-3) \dots (\alpha)$$

OJO: $|x-1|-3=0 \rightarrow |x-1|=3$

DE AQUÍ: $x-1=3 \vee x-1=-3$

$$\rightarrow x=4 \vee x=-2$$

DE (x): $|x-1| = |2x-5|$

$$\rightarrow x-1=2x-5, \vee x-1=-(2x-5)$$

$$x=4 \vee x=2$$

LUEGO: $M = \{4; -2; 2\}$

$\therefore \Sigma$ DE ELEM. DE M: $\frac{4}{x}$

6) DE $|x-2|+2x \leq \sqrt{-x} \dots (\alpha)$

Obs: $-x \geq 0 \rightarrow \overline{x \leq 0}$ CONDICIÓN NECESARIA

CON ESTO: $x-2 \leq -2 \rightarrow |x-2| = 2-x$

EN (x): $|2-x+2x| \leq \sqrt{-x}$

$$\rightarrow |x+2| \leq \sqrt{-x}$$

AL $\square$: $(x+2)^2 \leq -x \rightarrow x^2+5x+4 \leq 0$

$$\rightarrow (x+4)(x+1) \leq 0 \rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

INTERSECTANDO CON LA CONDICIÓN

NECESARIA: $-4 \leq x \leq -1$

DE AQUÍ, VALORES ENTEROS DE X SON:

$$-4; -3; -2; -1$$

$\therefore \Sigma$ DE TODOS ELLOS: $\frac{-10}{x}$

7) OJO: $|a|^2 = a^2; \forall a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |x^4-10| \leq x^4+8x^2$$

ES NO (-)

DE AQUÍ: $-(x^4+8x^2) \leq x^4-10 \leq x^4+8x^2$

$$\rightarrow -x^4-8x^2 \leq x^4-10 \wedge x^4-10 \leq x^4+8x^2$$

$$x^4+4x^2 \geq 0 \wedge 8x^2+10 \geq 0$$

$$(x^2+1)(x^2+5) \geq 0 \wedge x \in \mathbb{R}$$

ES (+)

$$\rightarrow (x+1)(x-1) \geq 0 \wedge x \in \mathbb{R}$$

$$(x \leq -1 \vee x \geq 1) \wedge x \in \mathbb{R}$$

INTERSECTANDO: $x \leq -1 \vee x \geq 1$

$$\therefore C.S. = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

8) DE $\frac{2-|2-x|-x}{|x-x^2|-2} < 0 \dots (I)$

Obs: $|x-x^2| \neq 2$

RESOLVAMOS: $|x-x^2| = 2$

$$\rightarrow x-x^2=2 \vee x-x^2=-2$$

$$\underline{x^2-x+2=0} \vee \underline{x^2-x-2=0}$$

$$\nexists x \in \mathbb{R} \vee (x-2)(x+1)=0$$

$$\rightarrow x=2 \vee x=-1$$

CON ESTO, DECIMOS QUE $x \neq 2$ $\wedge$ $x \neq -1$, y COMO EL C.S. $= (-\infty; +\infty)$

OSEA QUE: $x > 2$; QUIERE DECIR

QUE: $\underline{x > 2}$ CONDICIÓN NECESARIA (x)

DE (I): $\frac{2-|2-x|-x}{|x||5-x|-2} < 0$

DE LA CONDICIÓN NECESARIA:

$$\dagger 2-x < 0 \rightarrow |2-x| = x-2$$

$$\dagger 1-x < -1 \rightarrow |1-x| = x-1$$

$$\dagger |x| = x$$

$$\Rightarrow \frac{2-(x-2)-x}{x(x-1)-2} < 0 \rightarrow \frac{2(2-x)}{x^2-x-2} < 0$$

$$\rightarrow \frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{1}{x+1} > 0$$

$$\rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

INTERSECTANDO CON LA CONDICIÓN

NECESARIA: $x > 2$

$$\Rightarrow C.S. = \langle 2; +\infty \rangle$$

$$\text{IDENTIFICANDO: } a = 2$$

$$\textcircled{9} \text{ DE } |x| < 3 \rightarrow -3 < x < 3$$

$$\cdot \text{POR } -1: -3 < -x < 3$$

$$\cdot \text{SUMO } 4: 1 < 4-x < 7$$

$$\cdot \text{INVIERTO: } \frac{1}{1} < \frac{1}{4-x} < 1$$

ES (+)

$$\Rightarrow \frac{1}{1} < \left| \frac{1}{4-x} \right| < 1 \dots (1)$$

PERO POR CONDICIÓN:

$$\frac{1}{m+6} < \left| \frac{1}{4-x} \right| < m \dots (2)$$

$$\text{OJO: } \underline{m > 0}$$

$$\text{DE (1) y (2): } m \leq 1$$

$$\therefore 0 < m \leq 1 \quad \text{NO HAY CLAVE}$$

$$\textcircled{10} \text{ DE LA INECUACIÓN: } -x > 0$$

$$\rightarrow \underline{x < 0} \quad \text{CONDICIÓN NECESARIA}$$

$$\text{CON ESTO: } |x| = -x$$

$$\text{LUEGO: } |x+1| + |x-1| < 2$$

$|x+1|$

$$\rightarrow 2|x+1| < 2 \rightarrow |x+1| < 1$$

$$\rightarrow -1 < x+1 < 1 \rightarrow -2 < x < 0$$

INTERSECTANDO CON LA CONDICIÓN

NECESARIA: $-2 < x < 0$

$$\Rightarrow C.S. = \langle -2; 0 \rangle$$

IDENTIFICANDO: $a = -2$; $b = 0$

$$\therefore M = 4(-2)^2 - 5(0) = 16$$

$$\textcircled{11} \text{ DE } \left| \frac{x^2-16}{x-3} \right| \leq \frac{8(x+4)}{x^2-9} \dots (I)$$

ESTO ES > 0 NO PUEDE SER (-)

OJO

$$\rightarrow \frac{8(x+4)}{x^2-9} > 0 \rightarrow \frac{x+4}{(x+3)(x-3)} > 0$$



$$\Rightarrow \underline{-4 < x < -3 \vee x > 3} \quad (\alpha)$$

CONDICIÓN NECESARIA

DE (I):

$$-\frac{8(x+4)}{x^2-9} \leq \frac{x^2-16}{x-3} \wedge \frac{x^2-16}{x-3} \leq \frac{8(x+4)}{x^2-9}$$

(1)

(2)

DE (1):

$$\frac{x+4}{x-3} \left(x-4 + \frac{8}{x+3} \right) > 0 \rightarrow \frac{(x+4)(x^2-x-4)}{(x-3)(x+3)} > 0$$

CALCULANDO LAS RAÍCES DE $x^2-x-4=0$

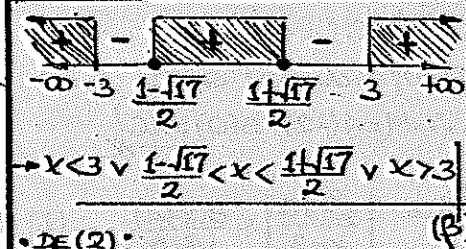
$$\text{SE TIENE: } x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{(x+4)\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)}{(x-3)(x+3)} > 0$$

DE LA COND. NEC. $x+4 > 0$, ENTONCES,

$$\text{QUEDA: } \frac{\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)}{(x-3)(x+3)} > 0$$

$$\text{OJO: } \underline{x = -4} \text{ ¡SOLUCIÓN!}$$



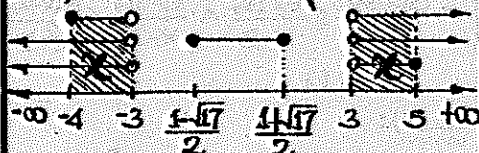
• DE (2):

$$\frac{x+1}{x-3} \left(x-4 - \frac{8}{x+3} \right) \leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-5)(x+1)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-3)(x+3)} \leq 0 \rightarrow \frac{x-5}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

OTO: $x = -4$ ¡es solución!

LUEGO: O.S. = (A) $\cap$ (B) $\cap$ (C)



O.S. = $M = [-4; -3] \cup (3; 5]$

LUEGO: $M \cap \mathbb{Z} = \{-4; 4; 5\}$

$\therefore n(M \cap \mathbb{Z}) = 3$

(12) • DE $\frac{x}{|x|-6} > 0$

$$(x > 0 \wedge |x|-6 > 0) \vee (x < 0 \wedge |x|-6 < 0)$$

$$(x > 0 \wedge x > 6) \vee (x < 0 \wedge x > -6)$$

p: $x > 6 \vee -6 < x < 0$

• DE $||x-1|+x| > \sqrt{-x} \dots (I)$

obj: $-x > 0 \rightarrow x < 0$ CONDICIÓN NECESARIA

CON ESTO: $x-1 < -1 \rightarrow |x-1| = 1-x$

EN (I): $|1-x|+x > \sqrt{-x} \rightarrow \sqrt{-x} < 1$

• A $\square$: $-x < 1 \rightarrow x > -1$

INTERSECTANDO CON LA CONDICIÓN

NECESARIA: $-1 < x \leq 0$

$\Rightarrow q: -1 < x \leq 0$

LUEGO: $S = \{x \in \mathbb{R} / p \leftrightarrow q\}$

DE AQUÍ: $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

(*) $\neg p \vee q$:

$\neg(x > 6 \vee -6 < x < 0) \vee (-1 < x \leq 0)$

$[x \leq 6 \wedge (x \leq -6 \vee x > 0)] \vee (-1 < x \leq 0)$

$(x \leq -6 \vee 0 \leq x \leq 6) \vee (-1 < x \leq 0)$

UNIENDO: $x \leq -6 \vee -1 < x \leq 6$ (A)

(*) $\neg q \vee p$

$\neg(-1 < x \leq 0) \vee (x > 6 \vee -6 < x < 0)$

$(x \leq -1 \vee x > 0) \vee (x > 6 \vee -6 < x < 0)$

UNIENDO: $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (B)

INTERSECTANDO (A) y (B):

$x \leq -6 \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x \leq 6$

$\square S = \langle -\infty; -6 \rangle \cup (-1; 0) \cup (0; 6]$

CON ESTO:

(*) $\exists x \in S \rightarrow |x+1| = 7 \rightarrow (I) \text{ es V}$

(**) $n(S \cap \mathbb{N}) = 6 \rightarrow (II) \text{ es F}$

(***) $\langle -2; 1 \rangle \not\subset S \rightarrow (III) \text{ es F}$

$\therefore$ sólo (I) es CORRECTO

(13) DE $\sqrt{\frac{x^2-2x+5}{3-2x^2-5x}} \geq (x-4)|x+5| \dots (I)$

$$\text{OBS: } \frac{x^2-2x+5}{-2x^2-5x+3} > 0 \rightarrow \frac{x^2-2x+5}{2x^2+5x-3} < 0$$

$$\text{OBS: } x^2-2x+5 \text{ es (+) } \forall x \in \mathbb{R} (\Delta < 0)$$

$$\rightarrow 2x^2+5x-3 < 0 \rightarrow (2x-1)(x+3) < 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } -3 < x < \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{CONDICIÓN} \\ \text{NECESARIA} \end{array}$$

$$\text{CON ESTO: } -7 < x-4 < -\frac{7}{2}$$

$$\text{O SEA QUE: } (x-4)|x+5| \text{ es (-)}$$

$$\text{EN (I) EL 2º MIEMBRO ES } < 0$$

$\Rightarrow$ LA SOLUCIÓN VIENE DADO POR

$$\frac{x^2-2x+5}{-2x^2-5x+3} > 0$$

PERO LA SOLUCIÓN DE ÉSTA YA SE CALCULÓ (VER COND. NECESARIA)

$$\therefore \text{C.S.} = \left(-3; \frac{1}{2}\right)$$

$$\textcircled{14} \text{OBS: } f(x) = -\frac{2(x+3)+1}{x+3} = -\left[2 + \frac{1}{x+3}\right]$$

AHORA, FORMEMOS $f(x)$ A PARTIR DEL DOMINIO: $x < -3$ v $-3 < x < 1$

$$\cdot \text{SUMO 3: } x+3 < 0 \text{ v } 0 < x+3 < 4$$

$$\cdot \text{INVIERTO: } \frac{1}{x+3} < 0 \text{ v } \frac{1}{4} < \frac{1}{x+3}$$

$$\cdot \text{SUMO 2: } 2 + \frac{1}{x+3} < 2 \text{ v } \frac{9}{4} < 2 + \frac{1}{x+3}$$

$$\cdot \text{MULTIPLICO POR -1:}$$

$$-\left[2 + \frac{1}{x+3}\right] > -2 \text{ v } -\left[2 + \frac{1}{x+3}\right] < -\frac{9}{4}$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(-2; +\infty\right)$$

$$\textcircled{15} \text{OBS: } |x+2-x^2| = |x^2-x-2|$$

$$\hookrightarrow f(x) = x^2 - \frac{x^2-x-2 + |x^2-x-2|}{|x^2-x-2| + |x+2-x^2|}$$

$$\text{RESOLVAMOS: } |x^2-x-2| + |x+2-x^2| = 0$$

PARA HALLAR EL DOMINIO.

$$\rightarrow |x^2-x-2| = x^2-x-2$$

ESTO SE VERIFICA SI $x^2-x-2 > 0$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 2$$

$$\text{LUEGO: } \text{DOM}(f) = \left(-1; 2\right)$$

POR LO ANTERIOR, ES EVIDENTE QUE PARA $-1 < x < 2$ SE TIENE QUE: $x^2-x-2 < 0$

$$\Rightarrow |x^2-x-2| = -(x^2-x-2)$$

EN f :

$$f(x) = x^2 - \frac{x^2-x-2 - (x^2-x-2)}{-(x^2-x-2) + |x+2-x^2|}$$

$$\rightarrow f(x) = x^2; -1 < x < 2$$

CALCULEMOS EL RANGO:

$$\text{SI } -1 < x < 2 \rightarrow 0 \leq x^2 < 4$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f) = [0; 4)$$

FINALMENTE:

$$\text{DOM}(f) \cap \text{Ran}(f) = [0; 2)$$

$$\textcircled{16} \text{ DE } f(x) = 4\sqrt{\frac{5x}{x^2-9}}$$

$$\text{OBS: } \frac{5x}{x^2-9} > 0 \rightarrow \frac{x}{(x+3)(x-3)} > 0$$



$$\therefore \text{DOM}(f) = \left(-3; 0\right] \cup \left(3; +\infty\right)$$

(17) • DE $f_1(x) = 1 - x$ $f_1(x) \rightarrow f_1(x) = \frac{1}{x+1}$

• DE $f_2(x) = x - 2 + 2f_2(x) \rightarrow f_2(x) = -x + 2$

LUEGO:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}; x > 2 \\ -x+2; x < 2 \end{cases}; g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

(1) DE $f: (5) x > 2 \rightarrow x+1 > 3$

$\rightarrow 0 < \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{3} \quad \hookrightarrow \text{Ran}(f_1) = (0; \frac{1}{3}]$

(2) $x < 2 \rightarrow -x - 2 \rightarrow \frac{-x+2}{f_2(x)} > 0$

$\hookrightarrow \text{Ran}(f_2) = (0; +\infty)$

DE AQUÍ:

$\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2)$

$\rightarrow \text{Ran}(f) = (0; +\infty)$

(4) DE g : OBS: $\text{DOM}(g) = \mathbb{R}$

ADemás: $x^2+1 > x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

DE AQUÍ: $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$

$\hookrightarrow \text{Ran}(g) = [0; 1)$

CON ESTO:

(4) $\text{Ran}(f) \cup \{0\} = [0; +\infty)$

VEAMOS QUE: $\text{Ran}(g) \subset [0; +\infty)$

$\Rightarrow (I) \text{ ES V}$

(44) $\text{Ran}(f) - \text{Ran}(g) = (0; +\infty) - [0; 1)$

$= [1; +\infty)$

$\Rightarrow (II) \text{ ES V}$

(44) $A = (0; +\infty) \cap [0; 1) = (0; 1)$

EA $x = \sqrt{\frac{1}{8}} \in A \wedge y = \sqrt{\frac{3}{8}} \in A$

VEAMOS QUE: $x^2 + y^2 = (\frac{1}{8}) + (\frac{3}{8}) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (III) \text{ ES V}$

$\therefore$ Las correctas: (I); (II); (III)

(18) SEA $y = \frac{2x}{x^2+1} \rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$

DE AQUÍ: $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y^2}}{2y}$

COMO $x \in \mathbb{R} \rightarrow 4-4y^2 \geq 0 \rightarrow y^2 \leq 1$

$\rightarrow -1 \leq y \leq 1 \rightarrow f(x) \in [-1; 1]$

OBS: $\neq \text{Máx. DE } f = 1$

$\neq \text{Mín. DE } f = -1$

$\therefore T = \text{Máx.}(f) + \text{Mín.}(f) = 0$

(19) DE $f(x) = \sqrt{25-x^2} - 2$

OBS: $25-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 25$

$\rightarrow -5 \leq x \leq 5 \hookrightarrow \text{DOM}(f) = [-5; 5]$

LUEGO: DE $-5 \leq x \leq 5$

• AL 0: $0 \leq x^2 \leq 25$

• POR -1: $-25 \leq -x^2 \leq 0$

• JUNTO 25: $0 \leq 25-x^2 \leq 25$

• SACO -5: $0 \leq \sqrt{25-x^2} \leq 5$

• RESTO 2: $-2 \leq \sqrt{25-x^2} - 2 \leq 3$

$f(x)$

$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = [-2; 3]$

$\therefore \text{DOM}(f) \cap \text{Ran}(f) = [-2; 3]$

20) ANALICEMOS POR TRAMOS:

• SI $x < -1$

$$\hookrightarrow f_1(x) = -|(-x-1)-(1-x)| = -|-2|$$

$$\rightarrow f_1(x) = -2 \quad \hookrightarrow \text{Ran}(f_1) = \{-2\} \quad (\alpha)$$

• SI $-1 \leq x \leq 1$

$$\hookrightarrow f_2(x) = -|(x+1)-(1-x)| = -|2x|$$

$$\text{COMO } -1 \leq x \leq 1 \rightarrow -2 \leq 2x \leq 2$$

$$\text{DE AQUÍ: } 0 \leq |2x| \leq 2$$

$$\text{• POR } -1: -2 \leq |2x| \leq 0$$

$$f_2(x)$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f_2) = [-2; 0] \quad (\beta)$$

• SI $x > 1$

$$\hookrightarrow f_3(x) = -|(x+1)-(x-1)| = -|2|$$

$$\rightarrow f_3(x) = -2 \quad \hookrightarrow \text{Ran}(f_3) = \{-2\} \quad (\theta)$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = (\alpha) \cup (\beta) \cup (\theta)$$

$$= [-2; 0]$$

21) (*) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $x \in [0; 6]$

Obs: $0 \leq x \leq 6 \rightarrow 1 \leq x+1 \leq 7$

• PAQUETE: $1 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$

$$f(x)$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = [1; 3]$$

(*) $g(x) = 1 + \sqrt{x+5}$; $x \in [-4; 4]$

Obs: $-4 \leq x \leq 4 \rightarrow 1 \leq x+5 \leq 9$

• PAQUETE: $1 \leq \sqrt{x+5} \leq 3$

• SUMO 1: $2 \leq \frac{1 + \sqrt{x+5}}{g(x)} \leq 4$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(g) = [2; 4]$$

$$\therefore \text{Ran}(f) \cup \text{Ran}(g) = [1; 4]$$

22) (*) $f(x) = a + \sqrt{x+b}$

DEL GRÁFICO:

$$+ f(3) = 3 \rightarrow a + \sqrt{3+b} = 3 \dots (1)$$

$$+ f(12) = 6 \rightarrow a + \sqrt{12+b} = 6 \dots (2)$$

$$(2) - (1): \sqrt{12+b} - \sqrt{3+b} = 3$$

• AL □:

$$12+b+3+b-2\sqrt{12+b}\sqrt{3+b} = 9$$

DE AQUÍ: $\sqrt{12+b}\sqrt{3+b} = 3+b$

• AL □: $36+15b+b^2 = 9+6b+b^2$

$$\rightarrow 9b = -27 \rightarrow b = -3$$

• EN (1): $a = 3 \quad \therefore a+b = -9$

23) DEL GRÁFICO: $d = f(a) - g(a)$

$$d = -a^2 + 2a - \frac{1}{2}a^2 \rightarrow d = -\frac{3}{2}a^2 + 2a$$

$$d = -\frac{3}{2}\left(a^2 - \frac{4}{3}a\right)$$

COMPLETANDO CUADRADOS:

$$d = -\frac{3}{2}\left[\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right]$$

$$d = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 \quad (I)$$

AQUÍ, d SERÁ MÁXIMO, SI

$\frac{3}{2}\left(a - \frac{2}{3}\right)^2$ ES MÍNIMO, Y ESTO OCURRE, CUANDO $\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$

$$\text{DE DONDE: } a = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = d \max = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a + d = \frac{4}{3}$$

$$24) \text{ DE } f(x) = a|x+b|+c$$

POR DESPLAZAMIENTOS HORIZONTAL Y VERTICAL A LO LARGO DE LOS EJES, SEGÚN LA GRÁFICA SE

TIENE: $b = -3$ A $c = 1$

$$\text{ADEMÁS: } f(0) = 5 \rightarrow a|0-3|+1=5$$

$$\text{DE AQUÍ: } a = \frac{4}{3}$$

$$\text{O SEA QUE: } f(x) = \frac{4}{3}|x-3|$$

VEAMOS QUE:

$$+ f(m) = \frac{4}{3}|m-3|+1=2$$

$$\rightarrow |m-3| = \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} m-3 = \frac{3}{4} \\ m-3 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{DE AQUÍ: } m = \frac{15}{4} \vee m = \frac{9}{4}$$

(VER GRÁFICO $m < 3$)

$$\text{SE OBSERVA QUE: } 3 = \frac{m+n}{2}$$

$$\text{COMO } m = \frac{9}{4} \Rightarrow n = \frac{15}{4}$$

$$\therefore n-m = \frac{3}{2}$$

$$25) \text{ DE } f(x) = |x+2| + |x-4|$$

REDEFINIENDO (POR TRAMOS):

$$\bullet \text{ SI } x < -2 \rightarrow f_1(x) = -x-2-x+4$$

$$\rightarrow f_1(x) = -2x+2$$

$$\bullet \text{ SI } -2 \leq x < 4 \rightarrow f_2(x) = x+2-x+4$$

$$\rightarrow f_2(x) = 6$$

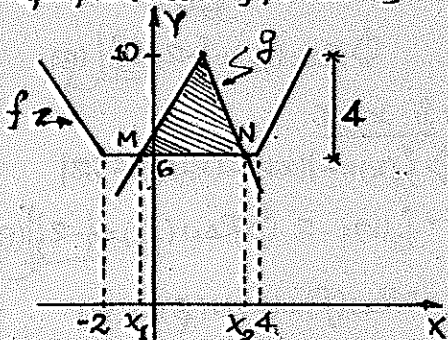
$$\bullet \text{ SI } x \geq 4 \rightarrow f_3(x) = x+2+x-4$$

$$\rightarrow f_3(x) = 2x-2$$

$$\hookrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+2; & x < -2 \\ 6; & -2 \leq x < 4 \\ 2x-2; & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{Y } g(x) = 10 - |2x-3|; x \in \mathbb{R}$$

GRAFICANDO LAS FUNCIONES:



OBJ: LAS ABCISAS DE LAS INTERSECCIONES DE LAS GRÁFICAS SE OBTIENE RESOLVIENDO:

$$10 - |2x-3| = 6$$

$$\rightarrow |2x-3| = 4 \rightarrow \begin{cases} 2x-3 = 4 \rightarrow x_2 = \frac{7}{2} \\ 2x-3 = -4 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{LUEGO: } MN = \frac{7}{2} - (-\frac{1}{2}) \rightarrow MN = 4$$

$$\therefore \text{ÁREA } \Delta = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$26) + f_1(x) = 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 13}; -5 \leq x < 2$$

$$\bullet \text{ RESTO I: } -6 \leq x-1 < 1$$

• AL $\square$: $0 \leq (x-1)^2 \leq 36$

• SUMO 13: $13 \leq (x-1)^2 + 13 \leq 49$

• SACO $\sqrt{}$: $\sqrt{13} \leq \sqrt{(x-1)^2 + 13} \leq 7$

• SUMO 1: $\sqrt{13+1} \leq 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 13} \leq 8$

$\Rightarrow \text{RAN}(f_1) = [\sqrt{13+1}; 8]$

ADemás: $\text{RAN}(f_2) = \{-3\}$

LUEGO: $\text{RAN}(f) = \text{RAN}(f_1) \cup \text{RAN}(f_2)$

$\therefore \text{RAN}(f) = [\sqrt{13+1}; 8] \cup \{-3\}$

27) $f(x) = 2x^2 - 7x + m - 11$

$\rightarrow f(\beta) = 2\beta^2 - 7\beta + m - 11 = \beta$ (DATO)

$\rightarrow 2\beta^2 - 8\beta + (m - 11) = 0$

COMO $\exists! \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta = 0$

$\hookrightarrow (-8)^2 - 4(2)(m - 11) = 0$

$\rightarrow 64 = 8(m - 11) \therefore m = 19$

28) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$

$f(-2) = 0 \rightarrow \frac{8}{3} - 2b + c = 0$
 $\rightarrow 2b - c = \frac{8}{3} \dots (1)$

$f(5) = 0 \rightarrow \frac{50}{3} + 5b + c = 0$
 $\rightarrow 5b + c = -\frac{50}{3} \dots (2)$

• (1) + (2): $7b = -14 \rightarrow b = -2$
 $\xrightarrow{\text{EN (1)}} c = -\frac{20}{3}$

LUEGO: $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - \frac{20}{3}; x \in \mathbb{R}$

HACEMOS: $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x - \frac{20}{3}$

$\rightarrow 2x^2 - 6x - (20 + 3y) = 0$

DE AQUÍ: $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4(2)(20 + 3y)}}{4}$

COMO $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0$

QUE DA QUE: $36 + 8(20 + 3y) \geq 0$

$\rightarrow 2(20 + 3y) \geq -9 \rightarrow y \geq -\frac{49}{6}$

$\therefore \text{RAN}(f) = [-\frac{49}{6}; +\infty)$

29) COMPLETANDO CUADRADOS:

$f(ax+b) = (ax+b)^2 + 2(ax+b) + 1 - b^2$

$\hookrightarrow f(ax+b) = (ax+b)^2 + 1 - b^2$

AQUÍ: $f(bx-a) = (bx-a)^2 + 1 - b^2$

USANDO EL OTRO DATO:

$(bx-a)^2 + 1 - b^2 = ax^2 - bx + c$

$b^2x^2 - 2abx + (a^2 + 1 - b^2) = ax^2 - bx + c$

$* b^2 = 0 \rightarrow b = \pm 3$

$* -2ab = -1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

$* a^2 + 1 - b^2 = c \rightarrow c = -\frac{31}{4}$

LUEGO:

$T = \frac{ab}{c} = \frac{(\frac{1}{2})(\pm 3)}{-\frac{31}{4}} = \pm \frac{6}{31}$
 NO HAY CLAVE

30) DATO: $f(x) = 2 - (x-1)^2$

$\rightarrow f(x+b) = 2 - (x+b-1)^2$

$= 2 - x^2 - 2(b-1)x - (b-1)^2$

$\hookrightarrow f(x+b) = -x^2 - 2(b-1)x + [2 - (b-1)^2]$

POR CONDICIÓN: $f(x+b) = f(x)$

$\hookrightarrow -x^2 - 2(b-1)x + [2 - (b-1)^2] = -x^2 + 2x + 1$

Obs: $t - 2(b-1) = 2 \rightarrow b = 0$

¡ESTE VALOR VERIFICA LOS TÉRMS. INDEPEND.!

Luego: $h(x) = 0$; $x \in (0; 1)$

$\therefore \text{RAN}(h) = \{0\}$
NO HAY CLAVE

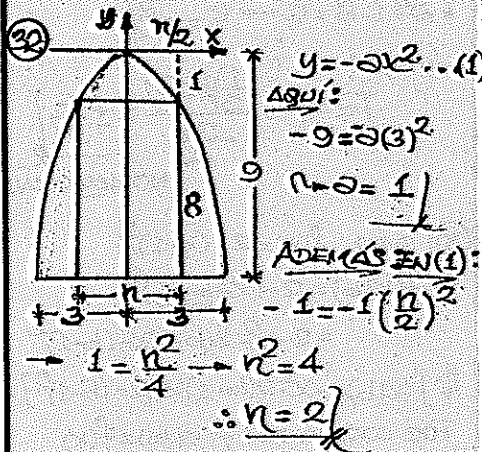
31) PARA CALCULAR LA ABSCISA DEL PUNTO DE TANGENCIA DE LAS GRÁFICAS DE f Y g (RECTA Y PARÁBOLA), SE DEBE RESOLVER LA ECUACIÓN $f(x) = g(x)$; DONDE, DICHA ECUACIÓN CUADRÁTICA DEBE TENER RAÍCES IGUALES, EN CONSECUENCIA: $\Delta = 0$

VEAMOS: $\frac{x^2}{8} = -x - m$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 8m = 0$

DE AQUÍ: $\Delta = 64 - 4(8m) = 0$

$64 = 32m \therefore m = 2$



33) $h(t) = b - (t^4 - 2t^2 + 1)$
 $h(t) = b - (t^2 - 1)^2$

Obs: PARA QUE h SEA MÁXIMA, $(t^2 - 1)^2$ DEBE SER MÍNIMO

Por tanto: $(t^2 - 1)^2 = 0$

DE AQUÍ: $t^2 - 1 = 0 \rightarrow t^2 = 1$; $t > 0$ (dato)

$\therefore t = 1$

34) $f(x) = \left(\frac{2}{3} - 5\right)x^2 + \left(\frac{1}{4} - 3\right)x + \frac{c}{5} - b$

Por condición, podemos plantear:

$f(0) = 0 \rightarrow \frac{c}{5} - b = 0 \rightarrow \frac{c}{5} = b \quad (\alpha)$

$f(1) = 1 \rightarrow \frac{2}{3} - 5 + \frac{1}{4} - 3 + \frac{c}{5} - b = 1$

DE AQUÍ: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 9 \quad (\beta)$

$f(-1) = -1 \rightarrow \frac{2}{3} - 5 - \frac{1}{4} + 3 + \frac{c}{5} - b = -1$

DE AQUÍ: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = 1 \quad (\theta)$

DE (β) Y (θ) : $a = 15 \wedge b = 16$

EN (α) : $c = 80$

$\therefore a + b + c = 111$

35) $f(x) = x - \frac{x^3}{11} + \frac{x^5}{2}$

Obs: $\text{DOM}(f) = \mathbb{R}$; $x \wedge -x \in \text{DOM} f$

Luego:

$f(-x) = -x + \frac{x^3}{11} - \frac{x^5}{2}$

$= -(x - \frac{x^3}{11} + \frac{x^5}{2})$

Obs: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ ES IMPAR
 $\hookrightarrow (I) \in V$

$$(*)*) g(x) = \sqrt[5]{(1-x)^4} + \sqrt[5]{(1+x)^4}$$

$$\text{DOM}(g) = \mathbb{R}; x \wedge -x \in \text{DOM}(g)$$

LUEGO:

$$g(-x) = \sqrt[5]{(1+x)^4} + \sqrt[5]{(1-x)^4}$$

$$\text{OBS: } g(-x) = g(x) \Rightarrow g \text{ ES PAR}$$

$$\hookrightarrow \text{(II) ES V}$$

$$(*)*) P(x) = \sqrt{1+x-x^2} - \sqrt{1-x-x^2}$$

CÁLCULO DEL DOMINIO:

SE OBTIENE RESOLVIENDO:

$$1+x-x^2 \geq 0 \wedge 1-x-x^2 \geq 0$$

$$x^2-x-1 \leq 0, \wedge x^2+x-1 \leq 0,$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \wedge \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

INTERSECTANDO:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \text{DOM}(P) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$\text{OBS: } x \wedge -x \in \text{DOM}(P)$$

LUEGO:

$$P(-x) = \sqrt{1-x-x^2} - \sqrt{1+x-x^2}$$

$$= -(\sqrt{1+x-x^2} - \sqrt{1-x-x^2})$$

$$\text{OBS: } P(-x) = -P(x) \Rightarrow P \text{ ES IMPAR}$$

$$\hookrightarrow \text{(III) ES V}$$

$$\therefore \text{(I), (II) y (III) SON CORRECTAS}$$

$$36) (*) f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$$

$$\text{OBS: } \text{DOM}(f) = \mathbb{R} \text{ (} 1+x+x^2 \text{ y } 1-x+x^2 \text{ SON POSITIVOS } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ TIENEN } \Delta < 0)$$

$$\text{OBS: } x \text{ y } -x \in \text{DOM}(f)$$

$$\text{LUEGO: } f(-x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}$$

$$= -(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$$

$$\text{OBS: } f(-x) = -f(x) \rightarrow f \text{ ES IMPAR}$$

$$(*)*) g(x) = 2|x| - x^2$$

$$\text{OBS: } \text{DOM}(g) = \mathbb{R}; x \text{ y } -x \in \text{DOM}(g)$$

$$\text{LUEGO: } g(-x) = 2|-x| - (-x)^2$$

$$= 2|x| - x^2$$

$$\text{OBS: } g(-x) = g(x) \rightarrow g \text{ ES PAR}$$

$$\therefore f \text{ ES IMPAR y } g \text{ ES PAR}$$

$$37) f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\text{OBS: } \text{DOM}(f) = \mathbb{R}; x \text{ y } -x \in \text{DOM}(f)$$

LUEGO:

$$f(-x) = a_0(-x)^n + a_1(-x)^{n-1} + a_2(-x)^{n-2} + \dots + a_n$$

$$+ \dots + a_n$$

CON ESTO NO SE PUEDE AFIRMAR QUE

$$f(-x) = f(x) \text{ ó } f(-x) = -f(x)$$

$$\hookrightarrow \text{(I) ES F; (II) ES F}$$

4) LAS FUNCIONES DEFINIDAS POR

$$\frac{1}{2}(F(x) + F(-x)) \text{ y } \frac{1}{2}(F(x) - F(-x))$$

SON PAR E IMPAR RESPECTIVAMENTE. LUEGO:

$$F(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(F(x) + F(-x))}_{f. \text{ PAR}} + \underbrace{\frac{1}{2}(F(x) - F(-x))}_{f. \text{ IMPAR}}$$

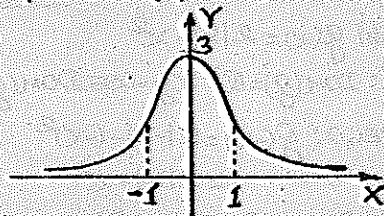
$$\Rightarrow \text{(III) ES V}$$

$$\therefore \text{SÓLO (III) ES CORRECTA}$$

38) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{|x|} & ; x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

GRAFICANDO (APROX.):



SEGÚN LA GRÁFICA:

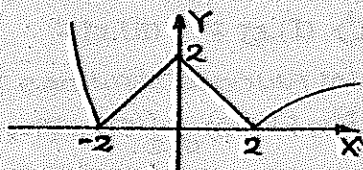
(I) ES V ; (II) ES F ; (III) ES V

∴ (I) y (III) SON CORRECTOS

39) ESCRIBIMOS:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & ; x \geq 2 \\ 2-|x| & ; -2 < x < 2 \\ x^2-4 & ; x \leq -2 \end{cases}$$

GRAFICANDO (APROX.):



SEGÚN LA GRÁFICA:

(I) ES V ; (II) ES F ; (III) ES V

∴ (I) y (III) SON CORRECTOS

40) (*) SEA $y = f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$; $x \in \mathbb{R}$

DE AQUÍ: $yx^2 + (y-1)x + y = 0$

$$\Delta = (y-1)^2 - 4y^2$$

$$\text{COMO } x \in \mathbb{R} \rightarrow (y-1)^2 - 4y^2 \geq 0$$

$$\rightarrow (2y)^2 - (y-1)^2 \leq 0 \rightarrow (3y-1)(y+1) \leq 0$$

$$\rightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{3}$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f) = [-1; \frac{1}{3}] \Rightarrow \text{(I) ES V}$$

(**) VEAMOS SI f ES INYECTIVA

$$\text{DE } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+x_1+1} = \frac{x_2}{x_2^2+x_2+1}$$

$$\rightarrow x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1 = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2$$

$$\rightarrow x_1x_2^2 - x_1^2x_2 + x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1x_2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0$$

$$(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1) = 0$$

$$\neq 0$$

(DADO QUE $x_1, x_2 \in (-1; \infty)$)

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \rightarrow x_2 = x_1$$

O SEA QUE: f ES INYECTIVA

(f ES CRECIENTE O DECRECIENTE)

• AHORA EN $[1; +\infty)$

$$\text{DEF: } f(1) > f(\infty) \rightarrow \frac{1}{2} > 0$$

CON ESTO, f ES DECRECIENTE EN

$$[1; +\infty) \quad \hookrightarrow \text{(II) ES V}$$

(***) EN $(-1; 1)$

$$\text{DEF: } f(-1) < f(1) \rightarrow -1 < \frac{1}{3}$$

CON ESTO, f ES CRECIENTE EN

$$(-1; 1) \quad \hookrightarrow \text{(III) ES V}$$

∴ (I) (II) y (III) SON CORRECTOS

41) TENGA EN CUENTA LO SIGUIENTE:

DADA LA FUNCIÓN LINEAL

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

(i) $a > 0 \rightarrow f$ ES FUNCIÓN CRECIENTE

(ii) $a < 0 \rightarrow f$ ES FUNCIÓN DECRECIENTE

CON ESTO:

(I) ES V; (II) ES V; (III) ES V

$\therefore$ (I), (II) y (III) SON CORRECTOS

(++++) $h(x) = 2x^3$

GRÁFICO:



Obs: h ES CRECIENTE
POR TANTO, ES
MONÓTONA

$\hookrightarrow$ (V) ES V

$\therefore$ 3 SON CORRECTAS

(42) (*) UNA FUNCIÓN NO DECRECIENTE EN UN CIERTO INTERVALO NO SIEMPRE ES CRECIENTE. $\hookrightarrow$ (I) ES F

(++) UNA FUNCIÓN DECRECIENTE EN CIERTO INTERVALO ES TAMBIÉN UNA FUNCIÓN NO CRECIENTE EN DICHO INTERVALO $\hookrightarrow$ (II) ES V

(+++) $f(x) = x + \sqrt{x+1}; x \in <1; 2>$

TOMEMOS $x_1, x_2 \in <1; 2>$

$\cdot$ Si $x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$

$\rightarrow \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 + 1}$

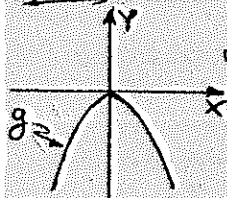
$\rightarrow x_1 + \sqrt{x_1 + 1} < x_2 + \sqrt{x_2 + 1}$

$f(x_1) < f(x_2)$

Obs: f ES CRECIENTE $\hookrightarrow$ (III) ES V

(+++) $g(x) = -x^2$

GRÁFICO:



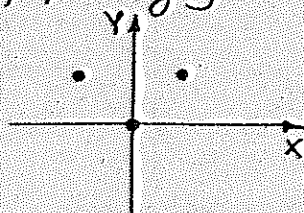
Obs: g NO ES
MONÓTONA

$\hookrightarrow$ (IV) ES F

(43) g SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ:

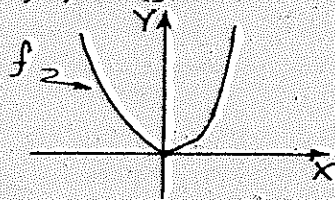
$$g(x) = \begin{cases} f(x); & \text{SI } x < 0 \\ f(-x); & \text{SI } x > 0 \end{cases}$$

CON ESTO Y LA GRÁFICA DE f (DATO),
LA GRÁFICA DE g ES:



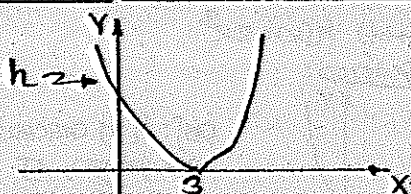
(44) $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 0 \\ x^3; & x \geq 0 \end{cases}$

SU GRÁFICA ES:



SEA $h(x) = f(xg(x))$

$\rightarrow$ SU GRÁFICA ES:



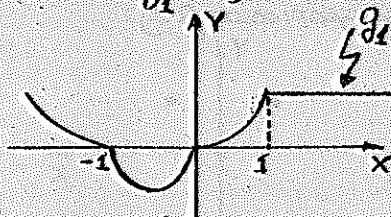
OBSÉRVESE, LA GRÁFICA DE $|f(x-3)|$ ES EQUIVALENTE A LA GRÁFICA ANTERIOR.

$\therefore$ GRÁF. APROX. (B)

(45) DATO: GRÁF. DE f (VER FIGURA)

NOS PUEDE GRÁFICO DE $g(x) = f(-(x-1))$

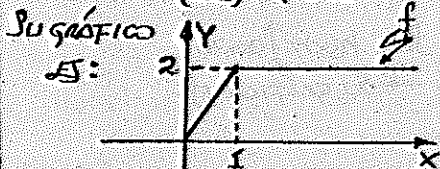
• GRÁFICO DE $g_1(x) = f(-x)$



LUEGO, LA GRÁFICA DE $g(x) = f(-(x-1)) = f(1-x)$, SE OBTIENE DESPLAZANDO LA GRÁFICA ANTERIOR UNA UNIDAD HACIA LA DERECHA.

$\therefore$ GRÁF. APROX. (D)

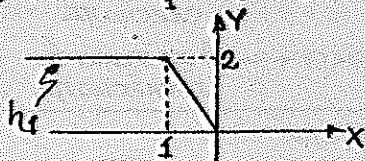
(46) Si $f(x) = \begin{cases} 2; & x > 1 \\ 2x; & 0 \leq x < 1 \end{cases}$



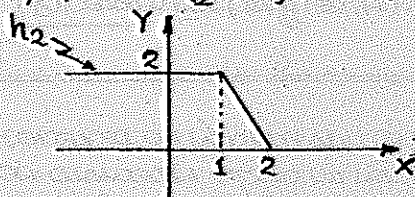
NOS PUEDE EL GRÁFICO DE

$$h(x) = |-1 + f(-(x-2))|$$

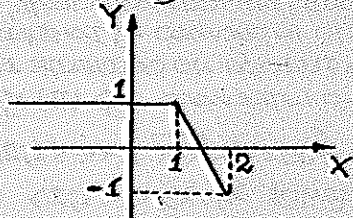
• GRÁFICO DE $h_1(x) = f(-x)$



• GRÁFICO DE $h_2(x) = f(-(x-2))$



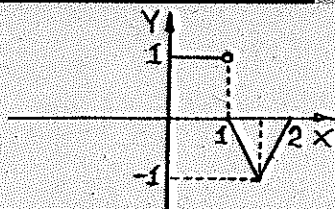
• GRÁFICO DE $h_3(x) = -1 + f(2-x)$



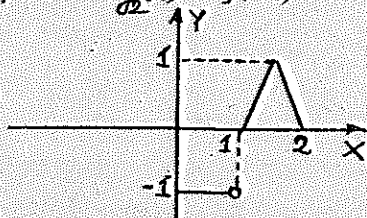
FINALMENTE, LA GRÁFICA DE $g(x) = |-1 + f(2-x)|$, SE OBTIENE REFLEJANDO SOBRE EL EJE X SÓLO LA PARTE QUE SE HALLA POR DEBAJO DE ESTE EJE EN LA GRÁFICA ANTERIOR.

$\therefore$ GRÁF. APROX. (D)

(47) CONOCIENDO LA GRÁFICA DE f (DATO), LA GRÁFICA DE $g(x) = f(-x)$ SE DETERMINA REFLEJANDO LA GRÁFICA DE f SOBRE EL EJE Y. ASÍ:



• GRÁFICO DE $g_2(x) = -f(-x)$



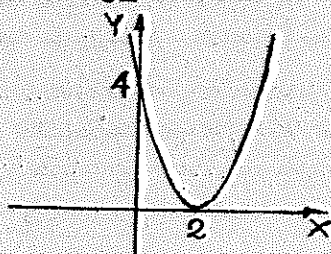
FINALMENTE, LA GRÁFICA DE $g(x) = 2 - f(-x)$ SE OBTIENE DESPLAZANDO LA GRÁFICA ANTERIOR EN FORMA PARALELA AL EJE Y, DOS UNIDADES HACIA ARRIBA.

∴ GRÁF. APROX. ①

⑧ SE PUEDE ESCRIBIR:

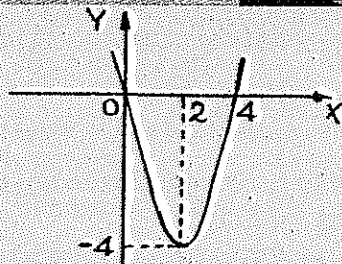
$$f(x) = |x^2 - 4x| - 2 = ||(x-2)^2 - 4| - 2|$$

• GRÁFICO DE $f_1(x) = (x-2)^2$

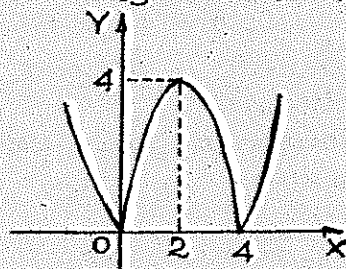


• GRÁFICO DE $f_2(x) = (x-2)^2 - 4$

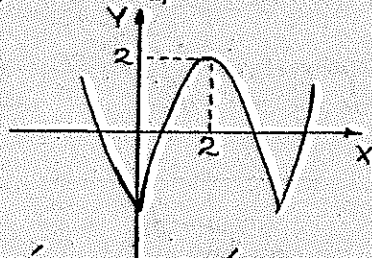
(DESPLAZA LA GRÁFICA ANTERIOR 4 UNIDADES HACIA ABAJO)



• GRÁFICA DE $f_3(x) = |(x-2)^2 - 4|$



• GRÁFICO DE $f_4(x) = |(x-2)^2 - 4| - 2$



Por último, la GRÁFICA DE

$f(x) = ||(x-2)^2 - 4| - 2|$ SE OBTIENE REFLEJANDO SOBRE EL EJE X SÓLO LA PARTE QUE SE HALLA POR DEBAJO DE ESTE EJE EN LA GRÁFICA ANTERIOR.

∴ GRÁF. APROX. ②

⑩ TRANSFORMAMOS LO SIGUIENTE:

$$-1 \frac{|2|-|x|+|x^2|}{1-x} = -1 \frac{|2|x|+|x|^2|}{|x|}$$

$$= -1 + \frac{|x||2||x|}{|x|} = -1 + 2|x|$$

Obs: $x \neq 0$

$$= -1 + (2|x|) = |x| + 1; x \neq 0$$

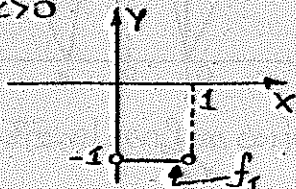
¿NOS PUEN LA GRÁFICA DE $f(|x|+1)$ CON $x \neq 0$.

O DE OTRA FORMA, LA GRÁFICA DE

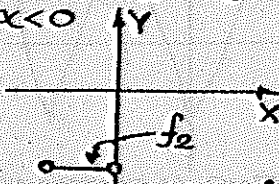
$$\begin{cases} f(x+1); \text{ si } x > 0 \\ f(-x+1); \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

CONOCIENDO LA GRÁFICA DE f (DE TO), SE TIENE:

• GRÁFICO DE $f_1(x) = f(x+1)$, SI $x > 0$



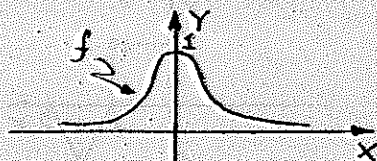
• GRÁFICO DE $f_2(x) = f(-x+1)$, SI $x < 0$



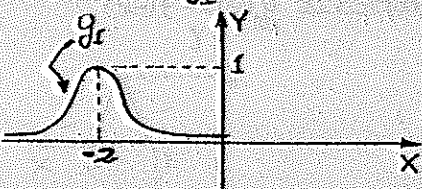
OJO: PRIMERO SE HALLA $f(-x)$ Y LUEGO $f(-x+1)$.

FINALMENTE, LA UNIÓN DE LOS GRÁFICOS ANTERIORES (DE f_1 Y f_2) NOS REPRODUCE LA GRÁFICA DE f .

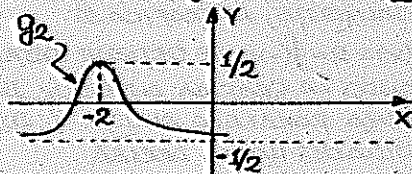
∴ GRÁF. APROX. (D)



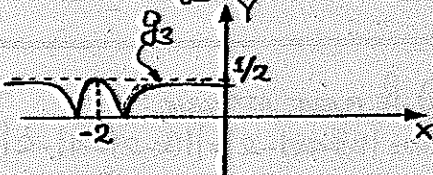
• GRÁFICO DE $g_1(x) = f(x+2)$:



• GRÁFICO DE $g_2(x) = f(x+2) - \frac{1}{2}$:



• GRÁFICO DE $g_3(x) = |f(x+2) - \frac{1}{2}|$:



FINALMENTE, LA GRÁFICA DE

$g(x) = |f(x+2) - \frac{1}{2}| + 1$ SE OBTIENE

DESPLAZANDO LA GRÁFICA ANTERIOR EN FORMA PARALELA A LA Y UNA UNIDAD HACIA ARRIBA.

∴ GRÁF. APROX. (C)

50) Dado $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, su gráfica aproximada es:

51) $f = \{(3;2), (0;0), (2;4), (3;-1), (4;3)\}$
OBSÉRVESE: $\text{Dom}(f) = \{-3;0;2;3;4\}$

$$g = \{(2;0), (3;4), (4;7), (6;2)\}$$

$$\text{Obs: } \text{Dom}(g) = \{2; 3; 4; 6\}$$

Ahora:

$$\text{Dom}(f^2 + 3g) = \text{Dom}(f^2) \cap \text{Dom}(3g) \\ = \text{Dom} f \cap \text{Dom} g$$

$$\hookrightarrow \text{Dom}(f^2 + 3g) = \{2; 3; 4\} \neq \emptyset$$

Luego:

$$\begin{aligned} x=2 \rightarrow (f^2 + 3g)(2) &= f^2(2) + (3g)(2) \\ &= f^2(2) + 3g(2) \\ &= 4^2 + 3(0) = 16 \end{aligned}$$

En forma similar:

$$x=3 \rightarrow f^2(3) + 3g(3) = (-1)^2 + 3(4) = 13$$

$$x=4 \rightarrow f^2(4) + 3g(4) = (-3)^2 + 3(7) = 30$$

$$\hookrightarrow f^2 + 3g = \{(2;16), (3;13), (4;30)\}$$

$$\text{Obs: } \text{Dom}(f^2 + 3g) = \{16; 13; 30\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ DE ELEMENTOS} : 59$$

$$(52) \cdot f(x) = \sqrt{x+4}; |x| < 4$$

$$g = \{(3;0), (1;4), (2;3), (-2;-2), (-1;-3), (3;4)\}$$

Además:

$$\left(\frac{1}{f^2 + g}\right)(3) = \frac{1}{f^2(3) + g(3)} \dots (\alpha)$$

$$\text{Pero: } f(3) = \sqrt{7} \rightarrow f^2(3) = 7$$

$$g(3) = 4$$

$$\text{En } (\alpha): \left(\frac{1}{f^2 + g}\right)(3) = \frac{1}{7+4} = \frac{1}{11}$$

$$g(x) = 3x+5; x < 4$$

$$\text{Obs: } \text{Dom}(f) = \{-3; -2; 2; 3; 4; 7\}$$

$$\text{Dom}(g) = \langle -\infty; 4 \rangle$$

Donde:

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{-3; -2; 2; 3\} \neq \emptyset$$

$$\hookrightarrow (f+g) \text{ y } (f-g) \text{ EXISTEN}$$

Luego:

$$\begin{aligned} x=-3 \rightarrow (f+g)(-3) &= f(-3) + g(-3) \\ &= 4 + (-4) = 0 \\ &\rightarrow (3;0) \in f+g \end{aligned}$$

En forma similar:

$$x=-2 \rightarrow f(-2) + g(-2) = 0 + (-1) = -1$$

$$\rightarrow (-2; -1) \in f+g$$

$$x=2 \rightarrow f(2) + g(2) = 0 + 11 = 11$$

$$\rightarrow (2; 11) \in f+g$$

$$x=3 \rightarrow f(3) + g(3) = 2 + 14 = 16$$

$$\rightarrow (3; 16) \in f+g$$

$$\hookrightarrow (f+g) = \{(3;0), (-2;-1), (2;11), (3;16)\}$$

$$\text{Como } P = \{-3; 13; 19\}$$

$$\hookrightarrow \text{Máx.}(P) = 19$$

En forma similar se obtiene

$f-g$, y se va a obtener lo si-

guiente (verifique):

$$f-g = \{(3;8), (2;2), (2;-11), (3;-12)\}$$

$$\text{C2) } Q = \{5; 0; -9\}$$

$$\hookrightarrow \text{Mín.}(Q) = -9$$

$$\therefore \text{Máx.}(P) + \text{Mín.}(Q) = 10$$

$$(53) \cdot f = \{(-3;4), (-2;0), (2;0), (3;2), (4;6), (7;5)\}$$

(54) OBSERVAMOS QUE:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } (x-2)(x-1) < 0 \\ 0, & \text{si } (x-2)(x-1) = 0 \\ 1, & \text{si } (x-2)(x-1) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{si } x = 1 \vee x = 2 \\ 1, & \text{si } x < 1 \vee x > 2 \end{cases}$$

Def. g:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

OBSÉRVESE, SÓLO EXISTEN INTERSECCIONES DE DOMINIOS EN LOS INTERVALOS QUE INDICAN LAS FLECHAS. SÓLO AQUÍ EXISTE $f \neq g$

LUEGO:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} -2; & 1 < x < 2 \\ -1; & x = 1 \\ 0; & x = 2 \\ 2; & x > 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{Ran}(f+g) = \{-2; -1; 0; 2\}$$

$$55) f(x) = \begin{cases} 2x-1; & 0 \leq x < 3 \dots (1) \\ 1; & 3 \leq x \leq 10 \dots (2) \end{cases}$$

$$(*) \text{ si } -1 \leq x \leq 2$$

$$\begin{array}{l} 0 \leq x^2 \leq 4 \\ 0 \leq \frac{x^2}{2} \leq 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \leq 2x \leq 4 \\ 4 \leq 2x+5 \leq 9 \end{array}$$

$$\bullet \text{ EN (1): } f\left(\frac{x^2}{2}\right) = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) - 1 = x^2 - 1$$

$$\bullet \text{ EN (2): } f(2x+5) = 1$$

$$\therefore f\left(\frac{x^2}{2}\right) + f(2x+5) = x^2 - 1 + 1 = x^2$$

$$56) (*) x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{y } g(x) = k \text{ CTE; } (g(x) = g(x_2))$$

$$\rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

$$\rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2) \quad \diamond (I) \text{ ES V}$$

$$(**) \text{ Si } h \text{ ES FUNCIÓN PAR} \rightarrow h(x) = h(-x)$$

$$\text{Def: } g(x) = h(|x|)$$

$$\rightarrow g(-x) = h(|-x|) \rightarrow g(-x) = h(|x|)$$

$$\rightarrow g(-x) = g(x) \rightarrow g \text{ ES FUNCIÓN PAR}$$

$$\diamond (II) \text{ ES V}$$

$$(***) \text{ Si } g \text{ ES FUNCIÓN IMPAR}$$

$$\rightarrow g(-x) = -g(x)$$

$$\text{Def: } h(x) = g(-x)$$

$$\rightarrow h(-x) = g(-(-x)) \rightarrow h(-x) = -g(-x)$$

$$\rightarrow h(-x) = -h(x) \rightarrow h \text{ ES FUNCIÓN IMPAR}$$

$$\diamond (III) \text{ ES V}$$

$$\therefore (I), (II) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$$

$$57) (*) \text{ Si } f \text{ y } g \text{ SON FUNCIONES IMPARES, ENTONCES, } f+g \text{ ES FUNCIÓN IMPAR, SIEMPRE Y CUANDO SE VERIFIQUE QUE } \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \neq \emptyset$$

$$\text{(LA PROPOSICIÓN I NO LO DICE)}$$

$$\diamond (I) \text{ ES F}$$

$$(**) \text{ POR PROPIEDAD: SI } f \text{ y } g \text{ SON FUNCIONES IMPARES, ENTONCES, } f \cdot g \text{ ES FUNCIÓN IMPAR, SIEMPRE Y CUANDO } \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \neq \emptyset$$

$$\diamond (II) \text{ ES V}$$

$$(***) \text{ SI HAY FUNCIONES CRECIENTES QUE PUEDEN SER FUNCIONES IMPARES}$$

$$\text{POR EJEMPLO: } f(x) = x^3 \quad \diamond (III) \text{ ES V}$$

$$\therefore (II) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$$

$$58) f(x) = \begin{cases} x^2; & 0 \leq x < 2 \dots (1) \\ 2x+1; & 2 \leq x < 5 \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{SI } 1 < x < \frac{3}{2}$$

$$2 < 2x < 3$$

$$1 < x^2 < \frac{9}{4}$$

$$1 < 2x-1 < 2$$

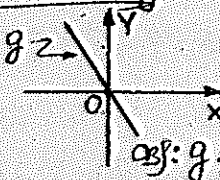
$$2 < 2x^2 < \frac{9}{2}$$

$$\bullet \text{Fu(1): } f(2x-1) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\bullet \text{Fu(2): } f(2x^2) = 2(2x^2)^2 + 1 = 4x^4 + 1$$

$$\text{COMO } g(x) = f(2x-1) - f(2x^2)$$

$$\text{GRÁFICO DE } g: \Rightarrow g(x) = -4x$$



Obs: g es DECRECIENTE

50) f y g están definidas en $[a; b]$

Además: $\text{Dom}(f)$ y $\text{Dom}(g) \subset (0; +\infty)$

OJO: LAS IMÁGENES DE f y g SON POSITIVAS.

COMO $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < b$

• PARA f FUNCIÓN CRECIENTE, SE TIENE:

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < \dots < f(x_n)$$

... (α)

• PARA g FUNCIÓN DECRECIENTE, SE TIENE:

$$g(x_1) > g(x_2) > g(x_3) > \dots > g(x_n)$$

- INVERTIENDO (LAS IMÁGENES SON POSITIVAS)

$$\frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)} < \frac{1}{g(x_3)} < \dots < \frac{1}{g(x_n)}$$

... (β)

• DE (α) x (β):

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)} < \frac{f(x_3)}{g(x_3)} < \dots < \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

POR PROPIEDAD:

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + \dots + g(x_n)} < \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

ESTO ES M

$$\therefore \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < M < \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

60) $f \rightarrow$ FUNCIÓN CRECIENTE
 $g \rightarrow$ FUNCIÓN DECRECIENTE
 $h \rightarrow$ FUNCIÓN CONSTANTE

ASUMIENDO QUE EL DOMINIO DE LAS FUNCIONES ES $\mathbb{R}$, SE TIENE:

SI x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$, DONDE:

$$(*) \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \dots (1)$$

$$\text{y } g(x_1) > g(x_2)$$

$$\bullet \text{POR -2: } -2g(x_1) < -2g(x_2) \dots (2)$$

$$\bullet (1) + (2): f(x_1) - 2g(x_1) < f(x_2) - 2g(x_2)$$

$$\rightarrow (f - 2g)(x_1) < (f - 2g)(x_2)$$

Obs: $(f - 2g)$ es CRECIENTE (I) es V

(*) PARA QUE $-hg + f$ SEA FUNCIÓN CRECIENTE SIENDO f CRECIENTE, ENTONCES $-hg$ DEBE SER CRECIENTE, Y COMO g ES FUNCIÓN DECRECIENTE, ENTONCES, $-h$ DEBE SER NEGATIVO, POR TANTO h DEBE SER POSITIVO (EL DATO NO LO DICE)

$\Rightarrow$ (II) es F

((+)) Pr $x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

COMO h ES FUNCIÓN
CONSTANTE $\Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \dots (1)$

(2) $h(1): h(x_1) + g(x_1) > h(x_2) + g(x_2)$

No $(h+g)(x_1) > (h+g)(x_2)$

CONCLUYO: $(h+g)$ ES FUNCIÓN DE-
CRECIENTE $\Rightarrow$ (III) ES V

$\therefore$ (I) y (III) SON CORRECTOS

(63) Obs: $f(x) = \sqrt{x-1}; x \geq 1$

$g = \{(2; -5), (0; 1), (-4; 6), (8; -3), (-7; 10)\}$

PARA HALLAR $f \circ g$, ESCOGEMOS
LOS PARES ORDENADOS DE g CUYA

2ª COMPONENTE SEA IGUAL A LA

1ª COMPONENTE DE f (EN ESTE OR-
DEN); ASÍ:

$(0; 1) \in g \wedge (1; 0) \in f \rightarrow (0; 0) \in f \circ g$

$(-4; 6) \in g \wedge (6; -5) \in f \rightarrow (-4; -5) \in f \circ g$

$(-7; 10) \in g \wedge (10; 3) \in f \rightarrow (-7; 3) \in f \circ g$

$\therefore f \circ g = \{(0; 0), (-4; -5), (-7; 3)\}$

$\therefore \# \text{ DE ELEM. DE } (f \circ g) = 3$

(61) SEGÚN LA REGLA:

$f(x-1) = \begin{cases} 0; & 0 < x < 1 \\ 1; & x > 1 \end{cases}; f(x-2) = \begin{cases} 0; & 0 < x < 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$

DOVE EXISTA INTERSECCIÓN DE DOMI-
NIOS, AHÍ EXISTE $f(x-1) + f(x-2) = h(x)$

CON ESTO:

$h(x) = \begin{cases} 0; & 0 < x < 1 \\ 1; & 1 \leq x < 2 \\ 2; & x > 2 \end{cases}$

$\therefore h$ ES FUNC. NO DECRECIENTE EN $[0; 100]$

(64) $f \rightarrow$ FUNCIÓN CRECIENTE

$g \rightarrow$ FUNCIÓN DECRECIENTE

ASUMIENDO QUE SUS DOMINIOS ES $\mathbb{R}$,
SE TIENE:

SI x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$, DOVE $a > 0$; $b < 0$

(*) SI $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

• POR a : $a f(x_1) < a f(x_2) \dots (1)$

ADemás: $g(x_1) > g(x_2)$

• POR b : $b g(x_1) < b g(x_2) \dots (2)$

(I) + (2): $a f(x_1) + b g(x_1) < a f(x_2) + b g(x_2)$

$\rightarrow (a f + b g)(x_1) < (a f + b g)(x_2)$

CON ESTO, $a f + b g$ ES FUNCIÓN CRE-
CIENTE. $\Rightarrow$ (I) ES V

((+)) SI $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

(62) $h(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2 + |x^2 + |x| - 6|}{2}; x \in \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2 + (|x^2 + |x| - 6|)}{2}$

(i) SI $|x| - 2 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 2$

$\therefore h_1(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2 + x^2 + |x| - 6}{2} = |x| - 2$

Obs: $h_1(x) \geq 0 \rightarrow h_1(x) = [0; +\infty)$

(ii) SI $|x| - 2 < 0 \rightarrow |x| < 2$

$\therefore h_2(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2 - (x^2 + |x| - 6)}{2} = 4 - |x|$

Obs: COMO $0 < |x| < 2 \rightarrow 0 < |x|^2 < 4$

$\rightarrow -4 < -|x|^2 < 0 \rightarrow 0 < 4 - |x|^2 < 4$

Obs: $0 < h_2(x) < 4 \rightarrow h_2(x) = (0; 4)$

JUEGO: $\text{Rango}(h) = (\alpha) \cup (\beta) = [0; +\infty)$

$\therefore \text{Dom}(h) \cap \text{Rango}(h) = [0; +\infty)$

Def: Siendo $x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ (66) $f(x) = x^2 - 1; x \in [-1; 2]$

Aquí: $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$

$$(f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2)$$

CON ESTO, $f \circ g$ ES FUNCIÓN DECRECIENTE. $\Rightarrow$ (III) ES F

(+++)(III) ES F

(++++)(II) Siendo $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Aquí: $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$

$$(g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$$

CON ESTO; $g \circ f$ ES FUNCIÓN CRECIENTE $\Rightarrow$ (IV) ES V

$\therefore$ (II) y (IV) SON CORRECTOS

(66) $f(x) = x^2 - 1; x \in [-1; 2]$

$g(x) = 3x - 1; x \in [-3; 1]$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

DE AQUÍ:

$$x \in [-3; 1] \wedge (3x - 1) \in [-1; 2]$$

$$x \in [-3; 1] \wedge 3x \in [0; 3]$$

$$x \in [-3; 1] \wedge x \in [0; 1]$$

$$\text{INTERSECCIÓN: } x \in [0; 1]$$

$$\therefore \text{Dom}(f \circ g) = [0; 1]$$

(67) $f(x) = 4|x| - x^2; -8 < x < 1$

$g(x) = \sqrt{1-x}; -4 < x < 0$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$

DE AQUÍ:

$$x \in (-8; 1) \wedge (4|x| - x^2) \in (-4; 0)$$

(a)

(b)

$$\text{DE (b): } -4 < 4|x| - x^2 < 0$$

$$\text{POR -1: } 0 < |x|^2 - 4|x| < 4$$

$$\text{LIM 04: } 4 < |x|^2 - 4|x| + 4 < 8$$

$$\rightarrow 4 < (|x| - 2)^2 < 8$$

$$-2\sqrt{2} < |x| - 2 < -2 \vee 2 < |x| - 2 < 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} + 2 < |x| < 0 \vee 4 < |x| < 2\sqrt{2} + 2$$

$$x \in \emptyset$$

DE LO QUE QUEDA:

$$-2\sqrt{2} - 2 < x < -4 \vee 4 < x < 2\sqrt{2} + 2$$

$$\text{PERO POR (a): } -8 < x < 1$$

INTERSECCIÓN AMBOS, SETIAJE:

$$-2\sqrt{2} - 2 < x < -4$$

$$(65) g = \{(-2; 0), (-1; 3), (2; 1), (3; -2), (4; 2), (5; 0)\}$$

$$h(x) = x^2 + 2; x \in \mathbb{Z}$$

SIMILAR A LA RESOLUCIÓN (63)
¡REVISE!

$$f(0; 2) \in h \wedge (2; 1) \in g \rightarrow (0; 1) \in g \circ h$$

$$f(1; 3) \in h \wedge (3; -2) \in g \rightarrow (1; -2) \in g \circ h$$

$$f(-1; 3) \in h \wedge (3; -2) \in g \rightarrow (-1; -2) \in g \circ h$$

$$\hookrightarrow g \circ h = \{(0; 1), (1; -2), (-1; -2)\}$$

$$\text{Def: } \text{Dom}(g \circ h) = \{1; -2\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ELEM(ESTO)} = -1$$

$$\hookrightarrow \text{Dom}(g \circ f) = \langle -2\sqrt{2} - 2; -4 \rangle$$

luego:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(4|x| - 2) \\ &= \sqrt{1 - (4|x| - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 4|x| + 1}\end{aligned}$$

COMPLETANDO CUADRADOS:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{(|x| - 2)^2 - 3}$$

CALCULEMOS SU RANGO CON EL DOMINIO:

$$-2\sqrt{2} - 2 < x < -4$$

$$\rightarrow 4 < |x| < 2\sqrt{2} + 2$$

$$\rightarrow 2 < |x| + 2 < 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow 4 < (|x| - 2)^2 < 8$$

$$\rightarrow 1 < (|x| - 2)^2 - 3 < 5$$

$$\rightarrow 1 < \sqrt{(|x| - 2)^2 - 3} < \sqrt{5}$$

$$(g \circ f)(x)$$

$$\therefore \text{Ran}(g \circ f) = \langle 1; \sqrt{5} \rangle$$

$$68) f(x) = \sqrt{2x-1}; g(x) = \sqrt{2x^2-7}$$

$$\text{DE } (f \circ g)(x) = h(x)$$

$$f(g(x)) = h(x)$$

$$\hookrightarrow \sqrt{2g(x)-1} = \sqrt{2x^2-7}$$

$$\rightarrow 2g(x)-1 = 2x^2-7$$

$$\therefore g(x) = \underline{x^2-3}$$

$$69) f = \{(0;0), (1;0), (2;1), (3;2), (4;3), (6;10)\}$$

$$g(x) = \sqrt{x+2}; -2 < x \leq 2$$

SIMILAR A LA RESOLUCIÓN (63)

¡REVISE!

$$\uparrow (0;0) \in f \wedge (0;\sqrt{2}) \in g \rightarrow (0;\sqrt{2}) \in g \circ f$$

$$\uparrow (1;0) \in f \wedge (0;\sqrt{2}) \in g \rightarrow (1;\sqrt{2}) \in g \circ f$$

$$\uparrow (2;1) \in f \wedge (1;\sqrt{3}) \in g \rightarrow (2;\sqrt{3}) \in g \circ f$$

$$\uparrow (3;2) \in f \wedge (2;2) \in g \rightarrow (3;2) \in g \circ f$$

$$\therefore g \circ f = \{(0;\sqrt{2}), (1;\sqrt{2}), (2;\sqrt{3}), (3;2)\}$$

$$\therefore \# \text{ELEM. DE } (g \circ f) = \underline{4}$$

$$70) \text{OBJ: } x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow f(x) = 2x+1; x < 2$$

$$g(x) = \begin{cases} 5x-3; & x < 0 \dots g_1 \\ -4x; & x > 1 \dots g_2 \end{cases}$$

• POR PARTES:

$$\text{Dom}(f \circ g_1) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

DE AQUÍ:

$$x < 0 \wedge 5x-3 < 2$$

$$x < 0 \wedge x < \frac{5}{5}$$

$$\hookrightarrow x < 0$$

ADemás:

$$\begin{aligned}(f \circ g_1)(x) &= f(g_1(x)) = f(5x-3) \\ &= 2(5x-3)+1\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow (f \circ g_1)(x) = 10x-5; x < 0$$

$$\text{Dom}(f \circ g_2) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(g_2) \wedge g_2(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

DE AQUÍ:

$$x > 1 \wedge -4x < 2$$

$$\underbrace{x > 1 \wedge x > -\frac{1}{2}}_{\leadsto x > 1}$$

DEMOS:

$$(f \circ g_2)(x) = f(g_2(x)) = f(-4x) \\ = 2(-4x) + 1$$

$$\leadsto (f \circ g_2)(x) = -8x + 1; \quad x > 1$$

FINALMENTE:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 10x - 5; & x < 0 \\ -8x + 1; & x > 1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } x < 0 \rightarrow 10x - 5 < -5$$

$$\bullet \text{ Si } x > 1 \rightarrow -8x + 1 < -7$$

$$\text{Obs: } \text{Ran}(f \circ g) = \langle -\infty; -7 \rangle$$

CON TODO ESTO:

$$(I) \text{ ES F ; (II) ES F ; (III) ES V}$$

Sólo (III) ES CORRECTO

$$(71) \quad f(x) = 5x + m; \quad g(x) = 3x - m \\ \text{DE } (f \circ g)(x) + 4 = (g \circ f)(x) - (f - g)(m)$$

$$f(g(x)) + 4 = g(f(x)) - f(m) + g(m)$$

$$f(3x - m) + 4 = g(5x + m) - 6m + 2m$$

$$5(3x - m) + m + 4 = 3(5x + m) - m - 4m$$

$$15x - 5m + m + 4 = 15x + 3m - 4m$$

$$\rightarrow 2m = 4 \quad \therefore m = 2$$

$$(72) \quad \text{DE } f \circ g = \{x; 2x^2 - 12x + 21\} / x \in \mathbb{R}$$

$$\leadsto f(g(x)) = 2x^2 - 12x + 21; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ DE } f: f(x) = 2x^2 + 3; \quad x \in \mathbb{R} \dots (x)$$

$$\text{Aquí: } f(g(x)) = 2g^2(x) + 3 \dots (p)$$

$$(p) = (x): 2g^2(x) + 3 = 2x^2 - 12x + 21$$

$$\leadsto g^2(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$\text{DONDE: } g(x) = \pm(x - 3)$$

$$\text{PERO, COMO } g \text{ ES FUNCIÓN DECRE-} \\ \text{CIENTE, } \therefore g(x) = -(x - 3) = -x + 3$$

$$(73) \quad f(x) = \sqrt{x}; \quad x \geq 0$$

$$g(x) = 2x + 3; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Don } (f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

$$\text{DE AQUÍ: } x \in \mathbb{R} \wedge 2x + 3 \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -\frac{3}{2}$$

$$x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = [-\frac{3}{2}; +\infty)$$

Juego:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 3)$$

$$\leadsto (f \circ g)(x) = \sqrt{2x + 3}$$

$$\text{Obs: Si } x \geq -\frac{3}{2} \rightarrow 2x + 3 \geq 0$$

$$\rightarrow \sqrt{2x + 3} \geq 0 \rightarrow f(g(x)) \geq 0$$

$$\hookrightarrow \text{Ran}(f \circ g) = [0; +\infty)$$

$$\therefore \text{Dom}(f \circ g) \cap \text{Ran}(f \circ g) = [0; +\infty)$$

$$(74) \quad g_k(x) = (g_1 \circ g_{k-1})(x); \quad \forall k \geq 2; k \in \mathbb{N}$$

$$y \quad g_1(x) = \frac{1}{x+2}; \quad g_2(3) = ?$$

$$\text{Obs: } g_2(x) = (g_1 \circ g_1)(x)$$

$$\leadsto g_2(x) = g_1(g_1(x))$$

$$\text{Aquí: } g_2(3) = g_1(g_1(3)) \dots (x)$$

PERO: $g_2(x) = (g_1 \circ g_2)(x)$

$\therefore g_2(x) = g_1(g_2(x)) = g_1\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$\rightarrow g_2(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+2} + 2} \rightarrow g_2(x) = \frac{x+2}{2x+5}$

ASÍ: $g_2(3) = \frac{5}{11}$

EN (x): $g_3(3) = g_1\left(\frac{5}{11}\right) = \frac{1}{\frac{5}{11} + 2}$

$\therefore g_3(3) = \frac{11}{21}$

(15) $f(x) = x^2 + 2 \wedge g(x) = x + 2$

CONDICIÓN:

$(f \circ g)(3) = (g \circ f)(2-1)$

$f(g(3)) = g(f(2-1))$

$f(3+2) = g(2-1)^2 + 2$

$\rightarrow (3+2)^2 + 2 = (2-1)^2 + 2 + 2$

$\rightarrow 9 + 6 + 2 = 2^2 - 2 + 1 + 2$

$\rightarrow 17 = -8 \therefore 2 = -8/17$

(16) $f(x) = x^2 + 1; x \in <0; 2\sqrt{2}]$

$g(x) = \sqrt{x^2 - 2|x|}; x \in [2; 5]$

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$

DE AQUÍ:

$x \in [2; 5] \wedge \sqrt{x^2 - 2|x|} \in <0; 2\sqrt{2}]$

(x)

(y)

DE (x): $0 < \sqrt{x^2 - 2|x|} \leq 2\sqrt{2}$

• AL $\square$: $0 < |x|^2 - 2|x| \leq 8$

• SUMO 1: $1 < |x|^2 - 2|x| + 1 \leq 9$

$\therefore 1 < (|x| - 1)^2 \leq 9$

DE AQUÍ:

$-3 \leq |x| - 1 \leq -1 \vee 1 \leq |x| - 1 \leq 3$

$-2 \leq |x| < 0 \vee 2 < |x| \leq 4$

$x \in \emptyset$

DE LO QUE QUEDA:

$-4 \leq x < -2 \vee 2 < x \leq 4$

PERO DE (x): $2 \leq x \leq 5$

INTERSECTANDO AMBOS, SE TIENE:

$2 < x \leq 4 \rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = (2, 4] = A$

ADemás:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 2|x|})$

$= \sqrt{x^2 - 2|x|}^2 + 1$

$\text{Así } (f \circ g)(x) = x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2$

CALCULEMOS SU RANGO CON EL DOMINIO:

$2 < x \leq 4 \rightarrow 2 < |x| \leq 4$

• RESTO 1: $1 < |x| - 1 \leq 3$

• AL $\square$: $1 < (|x| - 1)^2 \leq 9$

$(f \circ g)(x)$

$\therefore \text{Ran}(f \circ g) = (1, 9] = B$

FINALMENTE:

$A \cap B = (2, 4] \cap (1, 9] = (2, 4]$

(17) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}; 0 \leq x < 6$

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}; 0 \leq x < 2$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$

DE AQUÍ:

$$0 \leq x < 6 \wedge 0 \leq \frac{x+1}{x+2} < 2$$

$$0 \leq x < 6 \wedge 0 \leq \frac{x+1}{x+2} \wedge \frac{x+1}{x+2} < 2$$

$$0 \leq x < 6 \wedge 0 \leq x+1 \wedge x+1 < 2x+4$$

$$0 \leq x < 6 \wedge x > -1 \wedge x > -3,$$

INTERSECTANDO: $0 \leq x < 6$

$$\therefore \text{Dom}(g \circ f) = [0; 6)$$

$$(78) \cdot f(x) = 2x^2 - 4x + 8; -4 \leq x$$

$$\cdot g(x) = -2x^2 + 4; x \leq 4$$

OBJ: $h(x)$ SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ:

$$h(x) = [f(x) + g(x)] \circ f(x) \quad \text{?}$$

$$- [f(x) + g(x)] \circ g(x)$$

SI HACEMOS $t = f + g$

$$\diamond t(x) = -4x + 12; -4 \leq x \leq 4$$

$$\rightarrow h = (t \circ f) - (t \circ g)$$

DONDE:

$$\text{Dom}(h) = \text{Dom}(t \circ f) \cap \text{Dom}(t \circ g)$$

DE AQUÍ, HALLAMOS:

$$\text{Dom}(t \circ f) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(t)\}$$

$$\rightarrow x > -4 \wedge -4 \leq 2x^2 - 4x + 8 \leq 4$$

$$x > -4 \wedge -2 \leq x^2 - 2x + 4 \leq 2$$

$$x > -4 \wedge -5 \leq x^2 - 2x + 1 \leq -1$$

$$x > -4 \wedge -5 \leq (x-1)^2 \leq -1$$

$$\text{DE AQUÍ: } x \in \emptyset$$

$$x \in \emptyset$$

$$\diamond \text{OBJ: } \text{Dom}(t \circ f) = \emptyset \Rightarrow (t \circ f) \neq$$

$$\diamond \text{CON ESTO: } \text{Dom}(h) = \emptyset$$

$$\therefore h = (t \circ f) - (t \circ g) \text{ NO EXISTE}$$

(79) f y g SON FUNCIONES DEFINIDAS POR $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(*) SI f y g SON FUNCIONES INYECTIVAS, SE CUMPLE:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{SI } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \\ \cdot \text{SI } g(x_1) = g(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \end{array} \right\} (+)$$

SUMANDO SE TIENE:

$$\begin{aligned} \cdot \text{SI } f(x_1) + g(x_1) &= f(x_2) + g(x_2) \\ &\rightarrow 2x_1 = 2x_2 \end{aligned}$$

O TAMBIÉN:

$$\cdot \text{SI } (f+g)(x_1) = (f+g)(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\diamond (f+g) \text{ ES INYECTIVA } \diamond (I) \text{ ES V}$$

(*) SI f y g SON FUNCIONES INYECTIVAS, SE TIENE:

$$\cdot \text{SI } g(x_1) = g(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\cdot \text{SI } f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

$$\rightarrow x_1 = x_2$$

$$\diamond \text{DE AQUÍ: SI } (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\diamond (f \circ g) \text{ ES INYECTIVA}$$

EN FORMA SIMILAR:

$$\cdot (g \circ f) \text{ ES INYECTIVA } \diamond (II) \text{ ES V}$$

$$(*) (*) (III) \text{ ES F.}$$

POR EJEMPLO: SIENDO $f(x) = x^2$;

$x > 0$ UNA FUNCIÓN INYECTIVA,

SE TIENE QUE $f \circ f$ SIENDO SIEMPRE

NO INYECTIVA (GRÁFICO)

(+++)(IV) $\notin F$.

Por EJ.: Siendo $f(x)=x; x>0$
UNA FUNCIÓN INYECTIVA, SE
TIENE QUE f^2 SIGUE SIENDO
INYECTIVA (GRATÍFUELO)

(++++)(I) Si $f \circ g$ ES FUNCIÓN IN-
YECTIVA NO NECESARIAMENTE

g ES INYECTIVA $(X(I)) \notin F$

LUEGO:

DE PROPOSICIONES $V: 2=M$

DE PROPOSICIONES $F: 3=N$

$$\therefore M = \frac{2N-4}{X}$$

(80) Si $f: (-2; +\infty) \rightarrow B$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{6x-7}{5}; & -2 < x \leq 3 \\ \frac{x}{x-3}; & x > 3 \end{cases}$$

ES SURYECTIVA $\Rightarrow \text{Ran}(f) = B$

Obs: $f_1(x) = -\frac{6x-7}{5}; -2 < x \leq 3$

Por $-6/5: -\frac{18}{5} < -\frac{6x}{5} < \frac{12}{5}$

Sumo $-7/5: -5 < -\frac{6x-7}{5} < 1$
 $f_1(x)$

$\therefore \text{Ran}(f_1) = (-5; 1)$

Obs: $f_2(x) = \frac{x}{x-3}; x > 3$

• RESTO 3: $x-3 > 0$

• INVERSO: $\frac{1}{x-3} > 0$

• Por 3: $\frac{3}{x-3} > 0$

Sumo 1: $\frac{x}{x-3} > 1 \Rightarrow \text{Ran}(f_2) = (1; +\infty)$
 $f_2(x)$

Luego: $\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2)$

$\therefore \text{Ran}(f) = (-5; 1) \cup (1; +\infty)$

(81)(*) $f(x) = 2x; \forall x \in R$

Siendo $a > 1$ y $|x-y| > 0$

$\Rightarrow |2x-2y| > |x-y|$

$\rightarrow |2x-2y| > |x-y|$

$\rightarrow |f(x)-f(y)| > |x-y|$

$\forall x, y \in R \wedge a > 1$

$\Rightarrow (I) \notin F$

(*) Siendo f, g FUNCIONES INYEC-
TIVAS,

(1) Si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

(2) Si $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

DE AQUÍ, POR (2): $x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ Si $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore (g \circ f)$ ES INYECTIVA $\Rightarrow (II) \notin V$

(++) SIMILAR AL ANTERIOR

(VERIFÍQUELO) $\Rightarrow (III) \notin V$

$\therefore (II) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$

(82) $f(x+y) = 1+2x+f(x^2)-f(y^2)$

$\forall x, y \in R$

(*) Si $x=y \rightarrow f(2x) = f(0) = 1+2x+f(x^2)-f(x^2)$

$\therefore f(2x) = f(0) = 1+2x \dots (1)$

Aquí, para $x=0 \rightarrow f(0)f(0)=1$

$$\rightarrow f(0)^2=1 \rightarrow f(0)=\pm 1$$

$$f(1): f(2x)=1(1+2x)$$

$$\text{Aquí: } f(x)=1(1+x)$$

ES LA ÚNICA
UNA FUNCIÓN. CUMPLE

CON ESTO:

$$(I) \text{ ES F } (II) \text{ ES F}$$

(++)

$$f \text{ ES ÚNICA} \rightarrow \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ ES FUNC. INYEC.}$$

V

F

$$(III) \text{ ES F}$$

$\therefore (I), (II) \text{ y } (III) \text{ SON FALSOS}$

$$(3) (I) f: [0; b] \rightarrow [-1; 3]$$

ES FUNCIÓN BIYECTIVA / $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$\hookrightarrow f$ ES INYECTIVA Y SURYECTIVA

$$\text{POR TANTO: } \text{RAN}(f)=[-1; 3]$$

$$\text{OSEA QUE: } -1 \leq \sqrt[3]{x-1} \leq 3$$

$$\text{AL CUBO: } -1 \leq x-1 \leq 27$$

$$\text{SUMO 1: } 0 \leq x \leq 28$$

$$\text{RAN}(f)=[0; 28]=[a; b]$$

$$\text{OJ: } a=0 \wedge b=28 \therefore a+b=28$$

$$(I) \text{ ES V}$$

$$(++) f(x)=3x^2-12x+13; x \in [3; 5]$$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 3x_1^2-12x_1+13=3x_2^2-12x_2+13$$

$$3x_1^2-12x_1+13=3x_2^2-12x_2+13$$

$$3x_1^2-12x_1+13=3x_2^2-12x_2+13$$

$$\rightarrow (x_1+x_2)(x_1-x_2)-4(x_1-x_2)=0$$

$$\rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-4)=0$$

$$\text{ES } \neq 0 (x_1, x_2 \in [3; 5])$$

$$\rightarrow x_1-x_2=0 \rightarrow x_1=x_2$$

$$\rightarrow f \text{ ES INYECTIVA } (II) \text{ ES V}$$

(++) NOTA: TODA FUNCIÓN ES

SURYECTIVA SOBRE SU RANGO

OJ: g ES SURYECTIVA ADEMÁS

DE SER INYECTIVA, POR TANTO,

$$g \text{ ES BIYECTIVA } (III) \text{ ES V}$$

$\therefore$ SON CORRECTOS (I), (II) y (III)

$$(84) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B} / f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ ES SURYEC.}$$

TIVA $\hookrightarrow \text{RAN}(f)=\mathbb{B}$; OJ: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$$\text{SEA } y = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow yx^2-x+y=0$$

$$\text{COMO } x \in \mathbb{R} \rightarrow \Delta \geq 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(y)(y) \geq 0 \rightarrow y^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{DE AQUÍ: } -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \rightarrow \text{RAN}(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

$$(85) f(x) = \frac{2x}{5x-2} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{2}{5x-2}\right); x \neq \frac{2}{5}$$

$$(I) f(x) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2}{5} \left(1 + \frac{2}{5x_1-2}\right) = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{2}{5x_2-2}\right)$$

$$\text{OJ: } x_1=x_2 \rightarrow f \text{ ES INYECTIVA}$$

DE ACUERDO A LA NOTA (++) AN

TERIOR (RESOL. 83) f ES SURYEC.

TIVA $\therefore f$ ES BIYECTIVA $(I) \text{ ES V}$

$$(++) \text{ CALCULANDO: } \text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$$

ADEMÁS: $f(f(x))=x$. SIMILAR A 104

TERIOR: f ES BIYECTIVA $(II) \text{ ES V}$

(++) $\text{Dom}(f \circ f \circ f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$ y ADEMÁS

$$f(f(f(x))) = \frac{2x}{5x-2} \text{ SIMILAR A LO ANTERIOR: } f \text{ ES BIYECTIVA } \checkmark \text{ (III) ES V}$$

$\therefore$ (I), (II) y (III) SON CORRECTOS

$h(x) = x+20; x \in \mathbb{R}$
 $\checkmark$ h ES INYECTIVA Y TAMBIÉN SURYECTIVA, DADO QUE $\text{Ran}(h) = \mathbb{R}$.
 $\checkmark$ h ES BIYECTIVA $\checkmark$ (III) ES V
 $\therefore$ SÓLO (III) ES CORRECTO

(86) $f: A \rightarrow [1; +\infty)$ ES SURYECTIVA

$\rightarrow \text{Ran}(f) = [1; +\infty)$ y $\text{Dom}(f) = A$

SEA $x \in A$, COMO $A \cap \{0; 1\} = \emptyset$

$\checkmark$ A TIENE ELEMENTOS $x < 0$ o $x > 1$

EN $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2|x| + 3}$

$\bullet$ SI $x \geq 1 \rightarrow f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$

$\rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 2$, ASÍ: $f(x) \geq 2$,

$\forall x \geq 1 \rightarrow \text{Ran } f(x) = [2; +\infty)$

$\bullet$ SI $x < 0 \rightarrow f(x) = -\frac{x}{x^2 - 2x + 3}$

$\checkmark$ $f(x) < -2, \forall x < 0 \rightarrow \text{Ran } f(x) = (-\infty; -2]$

$\checkmark$ $\text{Ran}(f) = \text{Ran } f_1 \cup \text{Ran } f_2$

$= (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \neq [1; +\infty)$

CONCLUSIÓN: f NO ES SURYECTIVA

(88) $f: \langle \frac{2}{4}; \frac{11}{2} \rangle \rightarrow [-1; 1]$

$\checkmark$ $f(x) = \frac{-3x+16}{x-5} = -3 + \frac{1}{x-5}$

(*) SI $\frac{2}{4} < x < \frac{11}{2} \rightarrow \frac{1}{4} < x-5 < \frac{1}{2}$

$\rightarrow 2 < \frac{1}{x-5} < 4 \rightarrow -1 < -3 + \frac{1}{x-5} < 1$

$\rightarrow -1 < f(x) < 1 \rightarrow \text{Ran } f = [-1; 1]$

$\checkmark$ f ES SURYECTIVA $\checkmark$ (I) ES V

(+) SEA $x_1, x_2 \in \langle \frac{2}{4}; \frac{11}{2} \rangle$

SI $x_1 < x_2 \rightarrow x_1 - 5 < x_2 - 5 \rightarrow \frac{1}{x_1 - 5} > \frac{1}{x_2 - 5}$

$\rightarrow -3 + \frac{1}{x_1 - 5} > -3 + \frac{1}{x_2 - 5} \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\rightarrow f$ ES DECRECIENTE $\checkmark$ (II) ES F

(++) COMO f ES DECRECIENTE $\rightarrow f$ ES

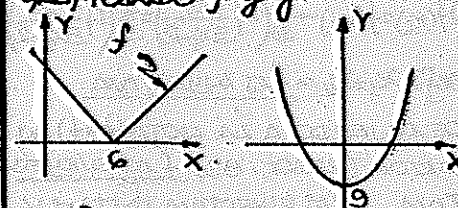
INYECTIVA, POR TANTO, f TIENE

INVERSA. $\checkmark$ (III) ES F

$\therefore$ SÓLO (I) ES CORRECTO

(87) $f(x) = |x-6|; g(x) = x^2 - 9; x \in \mathbb{R}$

GRAFICANDO f Y g :



$\checkmark$ SI TRAZAMOS PARALELAS A LOS EJES

PODEMOS UNIR ELLOS CORTAR

A LAS GRÁFICAS EN 2 PUNTOS.

$\checkmark$ f Y g NO SON INYECTIVOS

$\checkmark$ (I) Y (II) SON F

(89) VÉASE RESOLUCIÓN (82) (ES SIMILAR):

$f(x) = x + (1+x)$

CON ESTO:

(I) ES F ; (II) ES V

SI $f(x) = x + 1 \rightarrow f^*(x) = x - 1$

$\Rightarrow f(x) + f^*(x) = 2x \checkmark$ (III) ES V

$\therefore$ (II) Y (III) SON CORRECTOS

$$90) f = \{(x; (x-2)(4-x)) / x < 3\}$$

$$\hookrightarrow f(x) = (x-2)(4-x); x < 3$$

VEAMOS SI f ES INYECTIVA

$$\text{SEA } f(x_1) = f(x_2)$$

$$\rightarrow (x_1-2)(4-x_1) = (x_2-2)(4-x_2)$$

$$-8 + 6x_1 - x_1^2 = -8 + 6x_2 - x_2^2$$

$$\underline{x_1^2 - x_2^2 - 6x_1 + 6x_2 = 0}$$

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2) - 6(x_1-x_2) = 0$$

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-6) = 0$$

$$\neq 0 \quad (x_1, x_2 < 3)$$

DE AQUI: $x_1 = x_2 \rightarrow f$ ES INYECTIVA

POR TANTO: DEBE INVERSA

$$\text{SEA } y = f(x) = -8 + 6x - x^2$$

$$\rightarrow y = 1 - (9 - 6x + x^2) = 1 - (3-x)^2$$

$$\rightarrow (3-x)^2 = 1-y$$

$$\text{COMO } x < 3 \rightarrow 3-x = \sqrt{1-y}$$

$$\rightarrow x = 3 - \sqrt{1-y}$$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$f^*(y) = 3 - \sqrt{1-y}; y < 1$$

O TAMBIÉN:

$$f^* = \{(y; 3 - \sqrt{1-y}) / y < 1\}$$

$$91) f = \{(3;1), (2;3), (5;2), (7;4)\}$$

$$\rightarrow f^* = \{(1;3), (3;2), (2;5), (4;7)\}$$

$$\bullet g = \{(2;3), (7;5), (9;7), (11;4)\}$$

HALLEMOS $h = f \circ g$

-SIMILAR A LA RESOLUCIÓN (63)

¡REVISE!

$$(2;3) \in g \wedge (3;1) \in f \rightarrow (2;1) \in f \circ g$$

$$(7;5) \in g \wedge (5;2) \in f \rightarrow (7;2) \in f \circ g$$

$$(9;7) \in g \wedge (7;4) \in f \rightarrow (9;4) \in f \circ g$$

$$\hookrightarrow h = f \circ g = \{(2;1), (7;2), (9;4)\}$$

AHORA, HALLEMOS $h \circ f^*$

$$(3;2) \in f^* \wedge (2;1) \in h \rightarrow (3;1) \in h \circ f^*$$

$$(4;7) \in f^* \wedge (7;2) \in h \rightarrow (4;2) \in h \circ f^*$$

$$\therefore h \circ f^* = (f \circ g) \circ f^* = \{(3;1), (4;2)\}$$

$$92) f(x) = 2x + c \rightarrow f^*(x) = \frac{x-c}{2}$$

$$\text{CONDICIÓN: } f(c) = 2f^*(c)$$

$$3c = 2\left(\frac{c-c}{2}\right)$$

$$\rightarrow 3c = c - c \rightarrow 4c = c^2 \rightarrow c = 4$$

$$\hookrightarrow f(x) = 2x + 4 \wedge f^*(x) = \frac{x-4}{2}$$

$$\therefore f \circ f^* = \frac{f(1)}{f^*(1)} = \frac{6}{-3/2} = -4$$

$$93) f(x) = x^2 + 4x - 5; x \in (-4; -3)$$

$$\text{SEA } y = f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$\rightarrow y = (x+2)^2 - 9 \rightarrow (x+2)^2 = y+9$$

$$\text{COMO } x \in (-4; -3) \rightarrow (x+2) \in (-2; -1)$$

$$\hookrightarrow x+2 = -\sqrt{y+9} \rightarrow x = -2 - \sqrt{y+9}$$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$f^*(y) = -2 - \sqrt{y+9}$$

94) **NOTA:** DADO QUE EN TODAS LAS ALTERNATIVAS APARECE f^* , ENTONCES, ASUMAMOS QUE ÉSTA EXISTE ¡VERIFIQUELO! (f DEBE SER INYECTIVA)

LUEGO:
SEA $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

• AL CUBO: $y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{x^2(x^2 - 1)} \quad (y)$

$\rightarrow y^3 = 2x + 3y \rightarrow x = \frac{y^3 - 3y}{2}$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$f^*(x) = \frac{x^3 - 3x}{2}$

95) $g(x) = px + 4$; $h(x) = 5x - 3$

$g^* = \frac{x-4}{p}$; $h^* = \frac{x+3}{5}$

DATO: $h^*(g^*(px)) = \frac{x}{5}$

$\Rightarrow h^*\left(x - \frac{4}{p}\right) = \frac{x}{5}$

$\frac{x - \frac{4}{p} + 3}{5} = \frac{x}{5}$

$\rightarrow \frac{x}{5} + \frac{3 - \frac{4}{p}}{5} = \frac{x}{5} \rightarrow \frac{3 - \frac{4}{p}}{5} = 0$

DE AQUÍ: $p = \frac{4}{3}$

96) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$y = \{(2;4), (5;3), (-6;8), (0;2), (-\frac{1}{2};5)\}$

DE AQUÍ:

$g^* = \{(4;2), (3;5), (8;-6), (2;0), (5;-\frac{1}{2})\}$

LUEGO $(f \circ g^*)(3) = f(g^*(3))$

$= f(5) = \sqrt{5^2 - 1} = \sqrt{24}$

97) $f = \{(x;y) / y = x^2 - 1, x \leq 0\}$

$\hookrightarrow f(x) = x^2 - 1; x \leq 0$

(*) SI $x \leq 0 \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 1 \geq -1$

$\rightarrow f(x) \geq -1 \rightarrow \text{Dom}(f) = [-1; +\infty)$

$\hookrightarrow (I) \text{ ES } V$

(**) OSG: $x^2 = y + 1 \rightarrow x = -\sqrt{y+1}$

$(x \leq 0)$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$f^*(x) = -\sqrt{x+1}$; $\text{Dom}(f^*) = [-1; \infty)$

AQUÍ: $f^*(2) = -\sqrt{2+1} \hookrightarrow (II) \text{ ES } V$

(k+k) $\text{Dom}\left(\frac{f}{f^*}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(f^*) \neq \emptyset$

$\text{Dom}\left(\frac{f}{f^*}\right) = (-\infty; 0] \cap [-1; \infty) / x \neq -1$

$\rightarrow \text{Dom}\left(\frac{f}{f^*}\right) = [-1; 0] \hookrightarrow (III) \text{ ES } V$

$\therefore (II) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$

98) $f(x) = 2x + m$; $g(x) = mx$

SEA $y = g(x) = mx \rightarrow x = \frac{y}{m}$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$g^*(x) = \frac{x}{m}$

DATO: $(g^* \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 1$

$\rightarrow g^*(f(x)) = \frac{x}{2} + 1 \rightarrow g^*(2x+m) = \frac{x}{2} + 1$

$\rightarrow \frac{2x+m}{m} = \frac{x}{2} + 1$

$$\rightarrow \frac{2x}{m} + x = \frac{x}{2} + x \rightarrow \frac{2x}{m} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore m = 4$$

(99) $f(x) = x + \sqrt{x+1}$; $x \geq 3$
 SEA $\sqrt{x+1} = z \rightarrow x = z^2 - 1$
 Si hacemos: $y = x + \sqrt{x+1}$
 $\rightarrow y = z^2 - 1 + z$ ó $z^2 + z - (y+1) = 0$

DE AQUÍ: $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(y+1)}}{2}$

RESOLVIENDO:

$$\sqrt{x+1} = \frac{-1 + \sqrt{4y+5}}{2}$$

AL O: $x+1 = \frac{4y+5 - 2\sqrt{4y+5}}{4}$

$$x = \frac{4y+5 - 2\sqrt{4y+5}}{4} \rightarrow x = \frac{2y+1 - \sqrt{4y+5}}{2}$$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$f^*(x) = \frac{2x+1 - \sqrt{4x+5}}{2}$$

DEMOS: $(g^*f)^* = \{(3;0); (4;1); (6;2)\}$

DE AQUÍ: $\cdot (g^*f)(0) = 3 \rightarrow a = 0$

$\cdot (g^*f)^*(6) = 2 \rightarrow b = 2$

$\therefore a+b = 2$

(101) $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$

$\cdot g(x) = (m-1)x - 1 \rightarrow g^*(x) = \frac{x+1}{m-1}$

$\cdot (g^* \circ f)^*(x) = -8x + 12$

$\rightarrow (g^* \circ f)(x) = (-8x + 12)^*$

$g^*(f(x)) = \frac{x-12}{-8}$

$g^*(-\frac{1}{2}x + m) = -\frac{1}{8}x + \frac{12}{8}$

$\frac{-\frac{1}{2}x + m + 1}{m-1} = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{2}$

$\frac{-\frac{1}{2}x + \frac{m+1}{2}}{2(m-1)} = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{2}$

(100) $f = \{(0;0); (1;0); (2;1); (3;2); (4;3)\}$

así: $\text{Dom}(f) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

COMO $g(x) = \sqrt{x+3}$; $\text{Dom}(g) = \{x \geq -3\}$

$\therefore \text{Dom}(g^*f) = \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(f)$
 $= \{0; 1; 2\}$

OJO: $g^*(x) = x+3$; $\text{Dom}(g^*) = \text{Dom}(g)$

LUEGO, SIMILAR A LA RESOLUCIÓN (53) (REVISE), SE TIENE:

$g^*f = \{(0;3); (1;4); (2;6)\}$

así: $-\frac{1}{2(m-1)} = -\frac{1}{8} \wedge \frac{m+1}{m-1} = \frac{3}{2}$

RESOLVIENDO: $m = 5$

(102) (*) $f(x) = -x^2$; $x < 0$

así: $x^2 > 0 \rightarrow -x^2 < 0 \rightarrow f(x) < 0$

$\therefore \text{Ran}(f) = (-\infty; 0) = \text{Dom}(f^*)$

Sea $y = -x^2 \rightarrow x^2 = -y \rightarrow x = -\sqrt{-y}$ ($x < 0$)

INTERCAMBIANDO x POR y :

$f^*(x) = -\sqrt{-x}$; $x < 0 \nrightarrow (II) \notin V$

$$(\dagger\dagger) g(x) = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}; x < 1 \vee x > 1$$

OBSÉRVESE g POSEE INVERSA.

$$\text{SEA } y = \frac{2x}{x-1} \rightarrow x = \frac{y}{y-2}$$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$g^*(x) = \frac{x}{x-2}; x \neq 2 \quad \diamond (\text{II}) \in V$$

$$(\dagger\dagger\dagger) h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x-3}; x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\text{OBS: } 2x \leq -1 \rightarrow 4x \leq -2 \rightarrow 4x-3 \leq -5$$

COMASTO, OBSÉRVESE: $h(x) \notin \mathbb{R}$

$\diamond (\text{III}) \in F$

$\therefore (\text{I})$ y (II) SON CORRECTOS

$$(103) f(x) = \frac{x}{1+|x|}; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{SEA } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}$$

OBSÉRVESE, LA IGUALDAD SE VERIFICA

SIEMPRE QUE $\text{Signo}(x_1) = \text{Signo}(x_2)$

$$\text{ADEMÁS: } |x| = x \cdot \text{Signo}(x)$$

$$\diamond x_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot \text{Signo}(x_2) = x_2 + x_2 \cdot x_1 \cdot \text{Signo}(x_1)$$

$$\rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow f \text{ ES INYECTIVA}$$

REDEFINIENDO f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; x > 0 \dots (1) \\ \frac{x}{1-x} & ; x < 0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{DE (1): } x+1 > 1 \rightarrow 0 < \frac{x}{x+1} \leq 1$$

$$\rightarrow -1 \leq -\frac{x}{x+1} < 0 \rightarrow 0 \leq 1 - \frac{x}{x+1} < 1$$

$$\rightarrow 0 \leq f_1(x) < 1 \rightarrow \text{Ran}(f_1) = [0; 1) = \text{Dom}(f_1^*)$$

$$\text{HECEMOS: } y = \frac{x}{1+x} \rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

$$\text{DE ASÍ: } f_1^*(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-|x|}; x \in [0; 1)$$

$$\text{DE (2): } -x > 0 \rightarrow 1-x > 1$$

$$\rightarrow 0 < \frac{1}{1-x} < 1 \rightarrow -1 < -1 + \frac{1}{1-x} < 0$$

$$\rightarrow -1 < f_2(x) < 0 \rightarrow \text{Ran}(f_2) = (-1; 0) = \text{Dom}(f_2^*)$$

$$\text{COMASTO: } y = \frac{x}{1-x} \rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

$$\text{DE ASÍ: } f_2^*(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x}{1+|x|}; x \in (-1; 0)$$

$$\text{OBS: } f^*(x) = f_1^*(x) \cup f_2^*(x)$$

$$\diamond f^*(x) = \frac{x}{1-|x|}; x \in (-1; 1)$$

$$\text{COMO } h(x) = (f + f^*)(x) = f(x) + f^*(x)$$

$$\text{O } \text{Dom}(h) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(f^*)$$

$$\rightarrow \text{Dom}(h) = (-1; 1)$$

$$\text{ADEMÁS: } h(x) = \frac{x}{1+|x|} + \frac{x}{1-|x|}$$

$$\text{DE ASÍ: } h(x) = \frac{2x}{1-x^2}; x \in (-1; 1)$$

$$(104) f(x) = -x^2 - 6x - 1; x \in [-6; -4]$$

$$\text{SEA } y = f(x) = -(x^2 + 6x + 9) + 8$$

$$\text{DE ASÍ: } y - 8 = -(x+3)^2$$

$$(x+3)^2 = 8-y \rightarrow x = -3 \pm \sqrt{8-y}$$

COMO $x \in [-6; -4]$, TOMAMOS:

$$x = -3 - \sqrt{8-y}$$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$f^*(x) = -3 - \sqrt{8-x}$$

(105) VER RESOLUCIÓN (98), ES SIMILAR. $\therefore a=4$

(106) $f = \{(1;2), (2;2), (3;7), (5;6)\}$
 $g = \{(-2;0), (0;0), (4;1), (8;3), (9;5)\}$

HALLAMOS $f \circ g$

- SIMILAR A LA RESOLUCIÓN (63)

¡REVISE!

$(4;1) \in g \wedge (1;2) \in f \rightarrow (4;2) \in f \circ g$

$(8;3) \in g \wedge (3;7) \in f \rightarrow (8;7) \in f \circ g$

$(9;5) \in g \wedge (5;6) \in f \rightarrow (9;6) \in f \circ g$

$\therefore f \circ g = \{(4;2), (8;7), (9;6)\}$

OBSÉRVESE, $f \circ g$ ES INYECTIVA

PORTANTO:

$\text{Dom}(f \circ g)^* = \text{Dom}(f \circ g) = \{2; 6; 7\}$

$\therefore (f \circ f^*)(\frac{1}{2}) + (f \circ f^*)(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{x}$

(108) f SE PUEDE ESCRIBIR:

$f(x) = \frac{x+4}{(1-x)-1}; x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$

NÓTESE, CON ESTE DOMINIO $x+4$ ES

POSITIVO $\Rightarrow |x+4| = x+4$ y $x-1$

ES NEGATIVO $\Rightarrow |x-1| = 1-x$

$\therefore f(x) = \frac{x+4}{-x} = -1 - \frac{4}{x}$

SEA $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow -1 - \frac{4}{x_1} = -1 - \frac{4}{x_2}$

DE AQUÍ: $x_1 = x_2 \rightarrow f$ ES INYECTIVA

$\rightarrow f^*$ EXISTE

HACEMOS: $y = -1 - \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{-4}{y+1}$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$f^*(x) = \frac{-4}{x+1}$

(107) USEMOS LA RESOLUCIÓN (101)
 ¡REVISE!

$(f \circ f^*)(x) = \frac{2x}{1-x^2}; x \in (-1; 1)$

$(f \circ f^*)(x) = \frac{2(1/x)}{1-(1/x)^2}; x \in (-1; 1)$

AQUÍ:

$(f \circ f^*)(\frac{1}{2}) = \frac{2(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

$(f \circ f^*)(-\frac{1}{2}) = \frac{2(\frac{1}{-2})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

(109) $f(x+5) = \frac{1}{x+2}; (f^* \circ f)(4/x) = 2 \dots (x)$

OBJ: $f(x+5) = \frac{1}{(x+5)-3} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x-3}$

SEA $y = f(x) = \frac{1}{x-3} \rightarrow x = \frac{1}{y} + 3$

INTERCAMBIANDO x POR y

$y = \frac{1}{x} + 3 \rightarrow f^*(x) = \frac{1}{x} + 3$

EN (8): $f(\frac{4}{x}) = \frac{1}{\frac{4}{x}-3} = \frac{x}{4-3x}$

$$DE(\alpha): f^*(f(4/x)) = 2$$

$$\rightarrow f^*\left(\frac{x}{4-3x}\right) = 2$$

$$EN(0): \frac{4-3x}{x} + 3 = 2$$

$$n = \frac{4}{x} - 3 + 3 = 2 \therefore x = 2$$

(10) Si f es función CRECIENTE
ENTONCES f^* es función CRE-
CIENTE. $\diamond$ (I) es V

(II) Si g es función DECRECIENTE
ENTONCES g^* es función DECRE-
CIENTE. $\diamond$ (II) es F

(III) Siendo $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$
es: f y g TIENEN INVERSA

$$\diamond (f \circ g)^* = g^* \circ f^*; \forall f \text{ y } g$$

$\diamond$ (III) es V

$\therefore$ (I) y (III) SON CORRECTOS

$$(11) \text{ Sea } y = h(x) = 3x + 2\alpha$$

$$\rightarrow \text{DESPEJO } x: x = \frac{y-2\alpha}{3}$$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$h^*(x) = \frac{x-2\alpha}{3}$$

$$\text{Así: } h^*(\alpha+2) = \frac{\alpha+2-2\alpha}{3} = \frac{2-\alpha}{3}$$

$$\text{ADEMÁS: } h(\alpha^2) = 3\alpha^2 + 2\alpha$$

$$\text{POR DATO: } \frac{2-\alpha}{3} = 3\alpha^2 + 2\alpha$$

$$\text{DE AQUÍ: } 9\alpha^2 + 7\alpha - 2 = 0$$

$$\therefore \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -\frac{2}{9}$$



CUARTO SEMINARIO TALLER DE ÁLGEBRA

PRE-UNI 2005-II

CONTIENE:

● **FUNCIONES DIVERSAS**

- DOMINIO Y RANGO
- FUNCIONES ACOTADAS

● **LOGARITMOS**

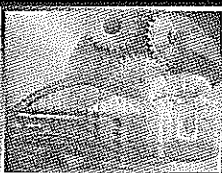
- PROPIEDADES, ECUACIONES E INECUACIONES

● **GRÁFICAS DE POLINOMIOS**

- MULTIPLICIDAD DE RAÍCES
- PROPIEDAD DE RAÍCES



LIMA - PERÚ



01. Si f es una función definida por: $f(x) = \frac{x}{x+4}$, $x \in [-1, 2]$, determine el máximo valor de f .
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{5}$
 D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$
02. Si f es una función definida por: $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ determine el menor $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq m$.
- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5
03. Dada la función f definida por: $f(x) = \frac{1}{9x^2+12x+11}$; si $|f(x)| \leq \frac{2}{3} M - 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$; determine el menor valor de M .
- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{8}{7}$
 D) $\frac{10}{7}$ E) $\frac{12}{7}$
04. Dada la función f definida por: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
 Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.
- I. f es función acotada en $\mathbb{R} - \{0\}$
 II. f no es función acotada en $\mathbb{R} - \{0\}$
 III. f es función acotada y es una función impar.
- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y II E) II y III
- 05.Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
- I. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(\frac{2}{x}\right)$ es función acotada.
- II. $g: (10^{-5}, 10) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ no es función acotada.
- III. Si h_1 y h_2 son funciones acotadas en un mismo dominio entonces $h_1 + h_2$ es función acotada.
- A) solo I B) solo II C) II y III
 D) I y II E) I y III
- 06.Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:
- I. Si $h(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ entonces h es función acotada en $\mathbb{R}$.
- II. Si f es función biyectiva entonces f es función acotada.
- III. Si f y g son funciones acotadas entonces $g \circ f$ es función acotada.
- A) solo II B) solo I C) II y III
 D) I y II E) I y III
07. Se define la función f por: $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+4}$; $x > 0$ y dados los siguientes enunciados:
- I. $\forall x > 0: f(x) > 0,5$
 II. f es función acotada superiormente
 III. f es función acotada.
- Cuál(es) son correctos:
- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) II y III E) I y III
08. Sea f una función definida por: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \in (-1, 1)$ y dados los siguientes enunciados:
- I. f es función acotada superiormente.
 II. f es función acotada inferiormente.
 III. f es función acotada.
 IV. El máximo valor de $f(x)$ es 1.
- Cuál(es) son correctos.
- A) solo I B) solo II C) I y IV
 D) solo IV E) I, II y III

09. Dada la función f cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} 3-3x, & x \leq 2 \\ 5x-5, & x \geq 3 \end{cases}; \text{ si } x \in [-4, 5],$$

determine el mínimo valor de f .

- A) -5 B) -4 C) -3
D) 0 E) 5

10. Se define la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{(a-1)x^2 + ax + a+1}, \text{ halle el}$$

menor valor positivo " k " tal que

$$|f(x)| \leq k, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } f(1) = \frac{1}{9}$$

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{11}$ C) $\frac{7}{22}$
D) $\frac{31}{41}$ E) $\frac{8}{23}$

11. Sea f una función definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$$

cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq \frac{3}{4}$.

II. $\forall x > 0: f(x)$ es acotado.

III. $\forall x > 1: |f(x-1)| \leq 1$.

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I, II y III

12. Se define la función f por: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{tal que: } f(x) = \begin{cases} x^3 + 2; & 0 \leq x < 2 \\ 10; & 2 \leq x \leq 5 \\ \frac{10}{x}; & x > 5 \end{cases}$$

y dado los siguientes enunciados:

I. $\forall x \geq 0: 2 < f(x) \leq 10$

II. f es función acotada inferiormente.

III. f es función acotada.

Cuál(es) son correctos.

- A) II y III B) solo I C) solo III
D) I y III E) solo III

13. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{x^2-1}.$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. f es función acotada, $\forall x \in [-1, 1]$

II. $|f(x)| \leq 2\sqrt{2}$, $\forall x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

III. f es función acotada solo inferiormente

- A) I y II B) II y III C) I, II y III
D) solo I E) solo III

14. Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. La función $f(x) = 2|x| - x^2$; $x \in (-2; 2)$ es función acotada.

II. La función $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1}, & x \in [0; 4] \\ -1; & x < 0 \end{cases}$ es función acotada.

III. La función $h(x) = \frac{-1}{x-1}$, $x \in [0; 3] - \{1\}$ es función acotada.

- A) solo III B) I y III C) II y III
D) I y II E) I, II y III

15. Se define la función f mediante:

$$f(x) = \frac{16-2^{x+3}}{8}.$$

cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos

I. $\forall x \in [1; \infty): f(x) > 0$

II. f es función creciente.

III. La gráfica de f tiene una asíntota horizontal: $y = 2$.

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

16. Se define la función f mediante

$$f(x) = \frac{7^x}{1+7^x}, \quad x \in [1; \infty); \text{ determine}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) \cup \text{Ran}(f).$$

A) $\left[\frac{1}{7}; \infty\right)$ B) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ C) $\left[\frac{7}{9}; \infty\right)$

D) $\left\langle 0; \frac{7}{2} \right]$ E) $\left[\frac{7}{8}; \infty\right)$

17. Determine el rango de la función definida por: $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

A) $\mathbb{R}$
 B) $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
 C) $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$
 D) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, \infty)$
 E) $\mathbb{R}^- \cup \{0\} = (-\infty, 0]$

18. Se define la función f mediante:

$f(x) = \sqrt[8]{2x^2 - 2^9}$; determine el dominio maximal de $f(x)$.

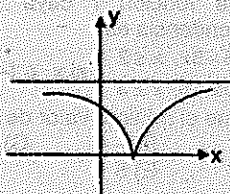
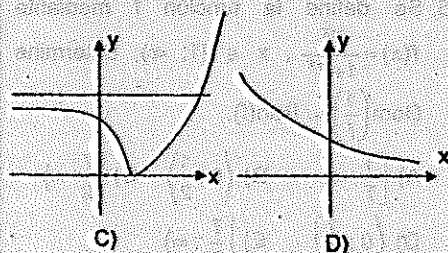
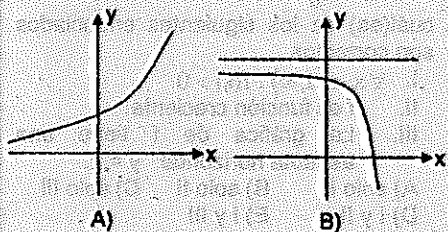
A) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 B) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
 C) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 D) $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$
 E) $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

19. Se define la función f mediante:

$f(x) = \sqrt{2^x + x - 3}$; determine el dominio maximal de $f(x)$.

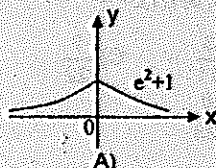
A) $[1, +\infty)$ B) $[2, +\infty)$
 C) $(-1/2, +\infty)$ D) $[1/2, 2)$
 E) $[-2, +\infty)$

20. Grafique la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por: $f(x) = |3 - 2^x|$

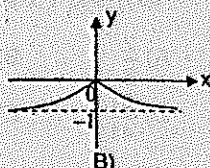


E

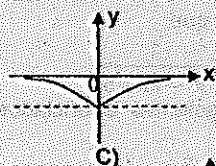
21. ¿Cuál de los gráficos representa mejor la función f definida por: $f(x) = |e^{2-x} + 2| - 1$.



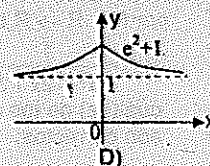
A)



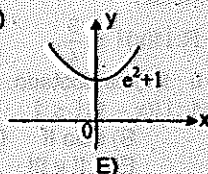
B)



C)



D)



E)

22. Se definen las funciones f y g mediante:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. El rango de $f^2(x) - g^2(x)$ es: $\{4\}$
 II. $f(x) \cdot g(x)$ es una función monótona.

III. $f^2(x) + g^2(x) = f(2x)$

A) solo II B) I y II C) solo I
 D) I y III E) I, II y III

23. Se definen las funciones f y g por:
 $f(x) = \log_a x$; $g(x) = \log_{1/a} x$; $0 < a < 1$.

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Si $b > 1$, entonces $f(b) + g(b) > 0$
 II. Si $b > 1$, entonces $g(b) - f(b) > 0$.
 III. Si $b \in (0; a)$, entonces $(f(b) > 1 \vee g(b) < -1)$.

- A) solo I B) solo II C) I y II
 D) I y III E) II y III

24. Sea $f(x) = \log_{1/2}(\log_2(x-3))$ cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Si $x \in (4, +\infty)$, entonces $x \in (-2, +\infty)$.
 II. Si $x \in (4, +\infty)$, si y solo si x es solución de $x^2(x-4) > 0$.
 III. $x \in (-4, \infty)$.

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y III E) I, II y III

25. Sea $f(x) = \sqrt[4]{\log \sqrt{\log(14 - |x^2 - 5|)}}$ determine el dominio maximal.

- A) $\{1; 2\}$ B) $\{1; 3\} \cup \{-3; -1\}$
 C) $\{2; 3\}$ D) $\{0; 1\}$
 E) $\{1; 2\} \cup \{2; 3\}$

26. Se define la función f por:

$$f(x) = \frac{\log \left(\frac{|x|-1}{|x+2|-2} \right)}{1 + \log |x-2| - |x-2|}, \text{ determine el dominio de } f; \text{ e indique } (D^{\text{com}}(f) \cap \mathbb{Z}).$$

- A) $\{-3, -2, -1, 0\}$
 B) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
 C) $\{-4, -3, -2, -1\}$
 D) $\{-4, -2, 2\}$
 E) $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

27. Sea f una función definida por:

$$f(x) = \log_{-4x+x^2}(x-2|x|+1) + \log_{1+\log_2 x}(1-|\log_2 x|)$$

tal que su dominio maximal es de la forma: $\langle a; b \rangle - \{c\}$

Calcule el valor de $T = a + b + c$.

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

28. Se define la función f por: $f(x) = 2^{\log_3 x}$ tal que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$. Determine la inversa de f .

A) $f^*(x) = \log_3(\log_2 x)$, $x > 2$

B) $f^*(x) = \log_2(\log_3 x)$, $x > 3$

C) $f^*(x) = 3^{\log_2 x}$; $x \in \mathbb{R}^+$

D) $f^*(x) = 2^{e^{3x}}$; $x \in \mathbb{R}^+$

E) $f^*(x) = 2^{(3^x)}$; $x \in \mathbb{R}^+$

29. Se define la función f por:

$$f(x) = \sqrt[4]{\log_7(x^2 - 2x - 8)} - 1, \text{ determine el dominio maximal.}$$

- A) $(-\infty, -3]$
 B) $(5, \infty)$
 C) $[-3; 5]$
 D) $(-\infty; -3] \cup [5, \infty)$
 E) $(-\infty; -2) \cup (4; \infty)$

30. Se define la función f de la siguiente manera: $f(x) = \log_{1/2} |x - 1/2|$, de los siguientes enunciados.

- I. f es función creciente.
 II. La gráfica de f corta al eje x en un sólo punto.
 III. La gráfica de f tiene una asíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$.

Cuál(es) son correctos:

- A) solo I B) solo III C) I y II
 D) I y III E) II y III

31. Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Si $0 < b < 1$ y $0 < x < y$ entonces $\log_b x < \log_b y$

- II. Si $b > 1$ y $0 < x < y$ entonces $\log_b x < \log_b y$

- III. Si $0 < b < 1$ y $0 < x < y$ entonces $b^x < b^y$

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) I y II E) II y III

32. Si $\log_5 6 = a$

$\log_{12} 3 = b$. Calcule $\log_5^3$

A) $\frac{2ab}{a+1}$

B) $\frac{2ab}{a-1}$

C) $\frac{2ab}{b+1}$

D) $\frac{2ab}{b-1}$

E) $\frac{b-1}{2ab}$

33. Dada la siguiente relación:

$2\log_b n^2 + \log_n a^3 - 15\log_n a + 4 = 18(\log_b n - \log_b a)$

si $a > 1$, $b > 1$, $n > 1$, entonces $M = \log_b n^2 + \log_n a^3$ cuyo valor es:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 6

34. Dados los siguientes enunciados:

I. $\text{antilog}_b(\log_b x) = \log_b(\text{antilog}_b x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.II. Si $a^x = b^x \wedge x \neq 0$, entonces $a = b$.III. Si $f(x) = a^x$ entonces f es función creciente $\forall a \neq 1$.

A) solo I

B) solo II

C) solo III

D) I y II

E) II y III

35. Se da la siguiente ecuación:

$\frac{1}{x} \text{antilog} \text{colog} x^{-1} + \log_x \left(\frac{4-x}{10} \right) =$

 $(\log \log n - 1) \text{colog}_x 10^{-1}$, determine el ó los valores que debe tomar n para que solo exista una raíz real.

A) 10 000

B) 20 000

C) 15 000

D) 45 000

E) 60 000

36. Sea $a; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ tal que:

$\log_{ab} \left[\text{colog}_{ab} \left(\frac{\sqrt{a}}{a} \right) + \frac{1}{2} \log_{ab} b \right] = \log_{ab}^2 a - \log_{ab}^2 b$

y se define la función f de modo que: $f(x) = \text{antilog}_2 x + \log_4 x$, determine elvalor de $f\left(\frac{b}{a}\right)$.

A) 3/2

B) 5/2

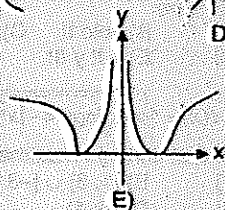
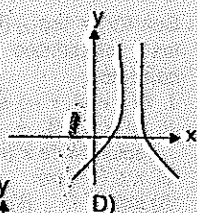
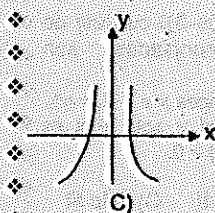
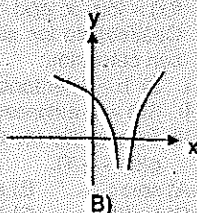
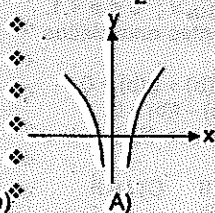
C) 9/2

D) 11/2

E) 13/2

37. Determine la gráfica de

$f(x) = \frac{1}{2} \text{colog}_2(x^2)$

38. ¿Cuántos ceros, entre la coma decimal y la primera cifra significativa tiene el número 0.006^{60} ?, si

$\log 2 = 0.301030$ y

$\log 3 = 0.477121$

A) 130

B) 131

C) 132

D) 133

E) 134

39. Calcule el número de cifras del producto $7^{12} \times 12^8$ conociendo:

$\log 7 = 0.84509$ y $\log 2 = 0.301030$,

$\log 3 = 0.477121$

A) 17

B) 18

C) 19

D) 20

E) 21

40. Si x es un número positivo que tiene en su escritura 6 dígitos en la parte entera, entonces $\log x$ es un valor que pertenece al intervalo:

A) (3; 4)

B) (5; 6)

C) (6; 7)

D) (7; 8)

E) (2; 3)

41. Dado los siguientes enunciados.

- I. La característica del logaritmo decimal de un número mayor o igual a la unidad es positiva.
- II. La mantisa del logaritmo de un número positivo de tres cifras es tres unidades menor que la mantisa del logaritmo de la milésima parte del número.
- III. Si la característica del logaritmo decimal de "n" es 1, entonces $10 \leq n < 100$.

Cuál(es) son correctos.

- A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) I y III

42. Si $4^x - 4^{x-1} = 24$; calcule el valor de $T = (2x)^x$

- A) $\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{5}$ C) 25
D) 125 E) $25\sqrt{5}$

43. Los valores de "x" que satisface a la ecuación $2^{x+1} + 4^x = 80$, son:

- A) $3 \text{ y } \frac{1}{\log 2}$ B) solo 3
C) solo $\frac{1}{\log 2}$ D) $-3 \text{ y } \frac{-1}{\log 2}$
E) solo -3

44. Determine el valor de "x" en la ecuación:

$$\left[{}_4\log_8 \sqrt{3} \right]^{9^{4+\log_{27} 2}} - 27^x = 0$$

- A) $\sqrt[3]{4}$ B) 5 C) $\sqrt[3]{6}$
D) 8 E) $\sqrt[4]{3}$

45. Sea $a > 0$, $x > 0$ y, además,

$$(7x)^{\log_a 7} - (5x)^{\log_a 5} = 0, \text{ determine el valor de } x.$$

- A) $\frac{1}{37}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{25}$
D) $\frac{1}{35}$ E) $\frac{1}{36}$

46. Determine el valor de "x" en:

$$\log_3^{-1}(x-1) = 2 + \log_3(x-1)^{-1}$$

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 7 E) 8

47. Se define la función f mediante:

$$f(x) = \log_2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}), \text{ entonces el}$$

Ran(f), es:

- A) $[1; 2]$ B) $[1; 3/2]$ C) $[0; 3/2]$
D) $[0; 2]$ E) $[2; 2\sqrt{2}]$

48. Determine la solución de la inecuación

$$x + \sqrt{8x+3} < x - \sqrt{32x+5}$$

- A) $(0; \infty)$ B) $(-1; 1)$ C) $(-1; \infty)$
D) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
E) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

49. Al resolver:

$$\pi^{\sqrt{x^2+1}} > \pi^{2x-1} \text{ y } \pi^{-\sqrt{2x-1}} < \pi^{x^2+1}, \text{ se}$$

obtiene $x \in [a; b]$, determine $T = ab$.

- A) 2/3 B) 1/5 C) 5/3
D) 2/5 E) 7/3

50. Al resolver la siguiente inecuación:

$$(x-1)^{\sqrt{x-2}} < \sqrt[3]{(x-1)^{(x-2)}}$$

El conjunto solución es $(m, +\infty)$. Determine m^2 .

- A) 25 B) 49 C) 114
D) 121 E) 144

51. Sea la inecuación: $2^{\log x} < x^3$. Determine el conjunto solución.

- A) $(1; +\infty)$ B) $(0; 1)$ C) $(1; 2)$
D) $(2; 4)$ E) $(3; +\infty)$

52. Dada la inecuación $(e^{-2x} - 4)(x-2) > 0$. Determine el conjunto solución.

- A) $(-\ln 2; 1)$ B) $(-\ln 2; 2)$
C) $(\ln 2; 3)$ D) $(\ln 2; \ln 8)$
E) $(\ln 2; \infty)$

53. Determine el conjunto solución de la inecuación:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\log_2 x} \geq (0,4)^{2+2\log_2 x}$$

- A) (0; 32] B) [1/2; 32] C) [1/2; 32)
D) [1/4; 16] E) [1/4; 32]

54. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\log_2(2^x - 2) \log_{1/2}(2^{x+1} - 4) > -2$$

- A) $(\log_2(9/4); 2)$ B) $(\log_2 3/2; 4)$
C) $\emptyset$ D) (2; 8) E) (2; 5)

55. Sea A el conjunto solución de la inecuación $\log_8(3 - |x|) < \log_{64}(|x| - 1)$, y los siguientes enunciados:

I. $\exists x_1 \in A / |x_1| = 5/2$

II. $\forall x \in A, 9 < x^2 < 16$

III. $n(A \cap Z) = 2$

Cuál(es) son correctos.

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

56. Determine el conjunto solución de la inecuación:

$$(1,25)^{1-\log_2 x} < (0,64)^{2+\log_2 x}$$

- A) $(5; +\infty)$
B) $(0; 1)$
C) $(0; 2) \cup (3; +\infty)$
D) $(0; 1/2) \cup (32; \infty)$
E) $(1; 3/2) \cup (5; \infty)$

57. El conjunto solución de la inecuación $\log_3 |3 - 4x| > 2$, es:

- A) $\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$ B) $R - \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$
C) $R - \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}$ D) R
E) $R - \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}$

58. Sea $S = [a; b) \cup (c; d]$ el conjunto solución de la inecuación:

$$(\log_2 |x| - 3 + x)(x + 2) \leq 0, \text{ determine el valor de } T = ad + bc.$$

- A) 3 B) 2 C) 0
D) -2 E) -4

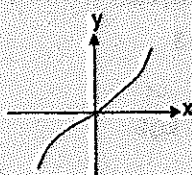
59. Si $\forall x \in R: x^2 \log_2 \left(\frac{4(y+1)}{y}\right) + 2x \log_2 \left(\frac{2y}{y+1}\right) +$

$$\log_2 \frac{(y+1)^2}{4y^2} > 0, \text{ el intervalo de } y \text{ es:}$$

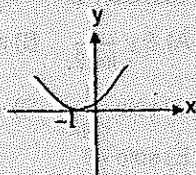
(a; b), obtener: a + b.

- A) $-\frac{33}{31}$ B) $-\frac{32}{31}$ C) $-\frac{37}{31}$
D) $-\frac{35}{31}$ E) 1

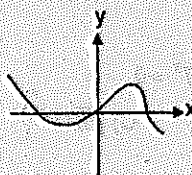
60. Determine cual de las gráficas representa mejor a la función polinomial: $P(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x$.



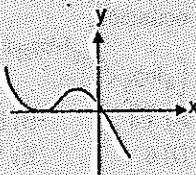
A)



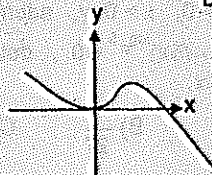
B)



C)

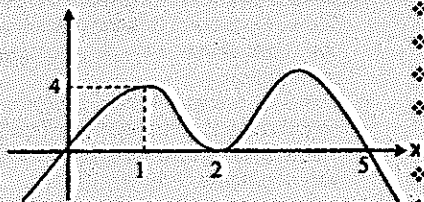


D)



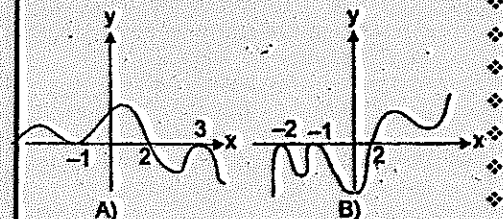
E)

61. Determine la función polinomial $f(x)$ de menor grado, cuya gráfica se muestra

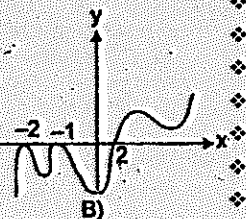


- A) $f(x) = x(x-2)^4(x-5)^3$
 B) $f(x) = -x(x-2)^2(x-5)$
 C) $f(x) = -x(x-2)^2(x-5)^3$
 D) $f(x) = x(x-2)^2(x-5)$
 E) $f(x) = x(x-2)^3(x-5)^2$

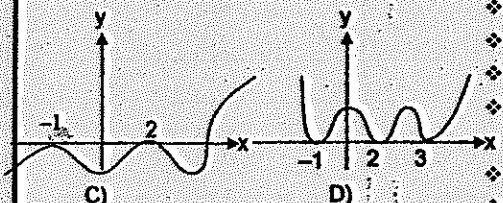
62. Determine la gráfica de la función polinomial: $f(x) = (x^2 + x - 66)^2(x + 2)^3$



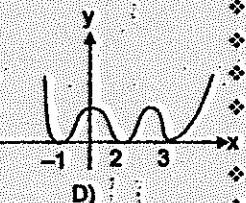
A)



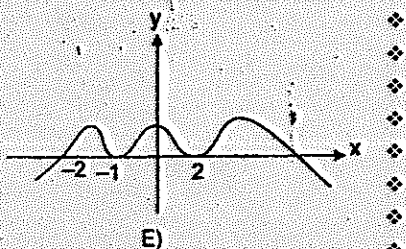
B)



C)

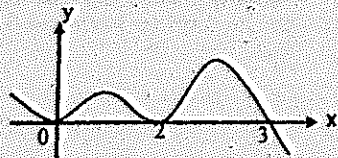


D)



E)

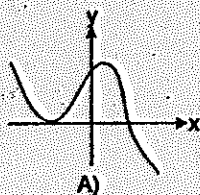
63. Sea P una función polinomial de grado n , de coeficiente principal -1 y cuya gráfica se muestra en la figura adjunta:



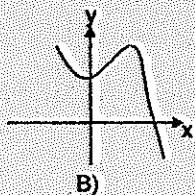
Si $P(5) = -1800$, determine la suma de coeficientes de P .

- A) 8 B) 10 C) 12
 D) 14 E) 32

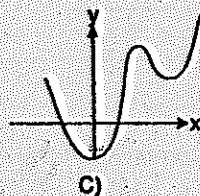
64. Determine cual de las alternativas representa mejor la gráfica de la función polinomial: $h(x) = x^3 + mx + n$, $m \neq 0$.



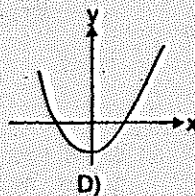
A)



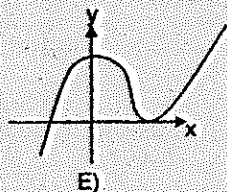
B)



C)

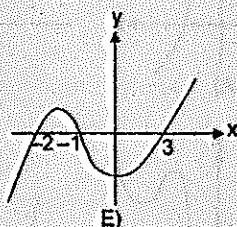
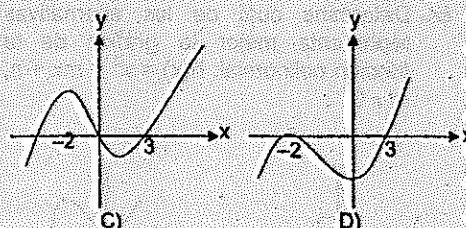
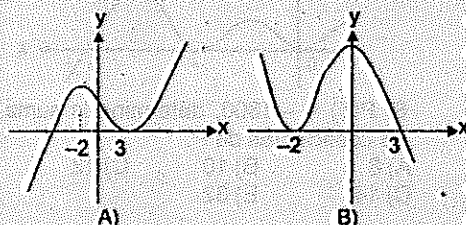


D)

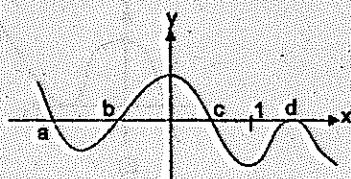


E)

65. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de la ecuación $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 = 0$, tal que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, entonces la figura que mejor representa la gráfica de la función $P(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x + 2)$ es:



66. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función polinomial $y = P(x)$.



Con respecto a la ecuación $P(1 - |x|) = 0$, cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Tiene 6 raíces; 2 son positivos, 2 son negativos y 2 complejos conjugados.
II. Tiene 8 raíces; 4 son positivos, 2 negativos y 2 complejos conjugados.
III. Tiene 6 raíces; 3 son positivos y 3 son negativos.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

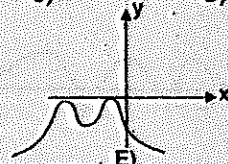
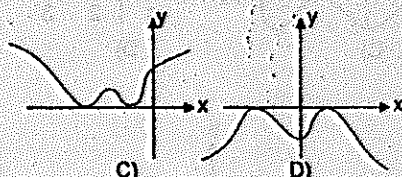
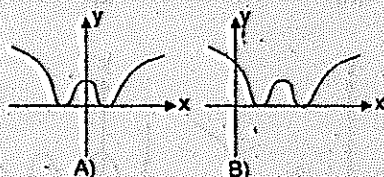
67. La ecuación $P(x) = x^n - nx + n - 1 = 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n > 1$, admite como raíz a $x = 1$; determine la multiplicidad de dicha raíz.

A) 3 B) 2 C) 4
D) n E) raíz simple

68. Si $a^{1/3} - a^{-1/3}$ es una de las raíces de: $x^3 = -3x - b$. Determine el equivalente de: $E = a + b$.

A) 5 B) $2a^2$ C) $2a$
D) a^{-1} E) $1/2$

69. Determine la gráfica aproximada de $f(x) = 36x^4 + 60x^3 + 37x^2 + 10x + 1$.



70. Si x_1 , x_2 y x_3 son raíces de la ecuación: $x^3 + 8x - 24 = 0$, entonces el valor de $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$, es:
 A) 120 B) 240 C) 480
 D) -480 E) -960
71. Si x_1 , x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación: $2x^3 - 6x^2 + 8x - 5 = 0$, calcule el valor de:

$$E = \frac{1}{x_1^2 - 3x_1 + 4} + \frac{1}{x_2^2 - 3x_2 + 4} + \frac{1}{x_3^2 - 3x_3 + 4}$$

 A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{6}{5}$
 D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{5}$
72. Si a , b ; c son las raíces de la ecuación: $2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$; determine el valor de:

$$E = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

 A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0
 D) $\frac{1}{2}$ E) 1
73. Siendo a , b y c las raíces de la ecuación: $x^3 + x + 3 = 0$, determine el valor de $T = a^3 + b^3 + c^3$.
 A) -9 B) -7 C) -5
 D) -4 E) -2
74. Determine el valor de a , si se sabe que las raíces de la ecuación $4x^4 - 28x^3 + (2a + 5)x^2 - 14x - a = 0$, satisfacen la relación:

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_3 x_4} + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) = -\frac{53}{24}$$

 A) 12 B) 16 C) 18
 D) 24 E) 28
75. Determine el producto de las raíces de la ecuación: $x^3 - ax^2 + 2ax - b = 0$; $a > 0$, sabiendo que su c.s. = $\{x_1; x_2; x_3\}$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 21$ y $x_2 = 2x_1 \neq 0$.
 A) 1 B) 2 C) 6
 D) 8 E) 12
76. Dado el polinomio: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9$ si $P(m) = P(n) = P(r) = 0$. Determine el valor de $P\left(\frac{m}{nr} + \frac{n}{mr} + \frac{r}{mn}\right)$.
 A) -5 B) -2 C) -1
 D) 2 E) 4
77. Si las raíces de la ecuación: $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$, están en la proporción 1: 2: 6, de los siguientes enunciados:
 I. Una raíz es positiva.
 II. Todas las raíces son enteras.
 III. La suma de dos de sus raíces es -4.
 A) solo I B) I y II C) solo II
 D) I y III E) solo III
78. Sea P una función polinomial mónica de grado 5; además: $P(1) = 3$, $P(2) = 5$, $P(3) = 7$, $P(4) = 9$, $P(5) = 11$, además si $G(x) = P(x) - 2x - 1$, determine el número de raíces reales de $G(x) = 0$.
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5
79. La ecuación $x^4 - 12x - 5 = 0$, posee 2 raíces cuya suma es 2. Determine la suma de las inversas de las otras 2 raíces.
 A) -0,6 B) -0,4 C) -0,2
 D) 0,2 E) 0,1

80. Sea la ecuación $2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$. Si dos de sus raíces suman 1, entonces determine la suma de las raíces negativas.

A) $-\sqrt{13}$ B) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{13}}{2}$
D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

81. Dados los siguientes polinomios:

$P(x)$ de grado 2 y término independiente 1

$Q(x) = (x-1) \cdot P(x) + 3x + 1$

Si $Q(2) = 7$ y $P(1) = 2$, entonces determine la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $Q(x) = 0$.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{8}{3}$
D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{11}{3}$

82. El polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$, presenta:

A) 5 raíces diferentes.
B) 2 raíces de multiplicidad 2.
C) 1 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3.
D) 1 raíz de multiplicidad 4.
E) 1 raíz de multiplicidad 5.

83. Si la suma de las raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + 23x + 15 = 0$ es -9. Determine la menor raíz de dicha ecuación.

A) -5 B) -4 C) -3
D) -2 E) -1

84. Se define la función f por: $f(x) = x^5 + x - 1$. Determine el número de raíces reales.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

85. Se define la función polinomial f como: $p(x) = x^5 + x - 66$.

cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. $p(x) = 0$ tiene dos raíces reales del mismo signo
II. $p(x) = 0$ tiene dos raíces reales de diferente signo y cuatro complejas.
III. Si x_1, x_2 son raíces reales de $p(x) = 0$, entonces $x_1 \in (-3, -2) \wedge x_2 > 0$.

A) II y III B) I y II C) I y III
D) solo III E) solo II

86. Determine la suma de las raíces racionales de $p(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

87. En la ecuación polinomial:

$4x^5 - 16x^4 - 31x^3 + 145x^2 - 66x - 72 = 0$; indique el número de raíces negativas que posee.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

88. Dados los complejos z, w, u, v de módulos iguales a 2, entonces:

$E = |zu + wv|^2 + |z\bar{v} - w\bar{u}|^2$ es:

A) 4 B) 2 C) 32
D) 64 E) 8

89. Sean los números complejos:

$m = 1 + yi, n = u + vi; \{y, u, v\} \subset \mathbb{Z}^+$, si además se cumplen:

$m + n = a + 5i$

$m \cdot n = -1 + 13i$

siendo a un número entero comprendido entre 1 y 9. Determine el mayor valor de " u ".

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

90. Si $Z \in \mathbb{C}$ y está definido por:

$$Z = \frac{(1; 1)^2 (2; 2)^2 (3; 3)^2}{(0; 6)^2}, \text{ entonces el}$$

complejo equivalente a Z es:

- A) 4i B) 8i C) 8
D) 4 E) $1+i$

91. Si $Z \in \mathbb{C} / \left| Z + \frac{1}{Z} \right| = 1$ determine el mayor $|Z|$.

- A) 2 B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) 1
D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

92.Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Si $\bar{z}$ se localiza en el segundo cuadrante, $-iz$ se localiza en el segundo cuadrante.
II. Si z se localiza en el tercer cuadrante, $(1+i)z$ se localiza en el cuarto cuadrante.

III. $a = -1$, siempre que $\operatorname{Re}\left(\frac{1+ai}{1+i}\right) = 0$.

- A) solo I B) solo II C) I y III
D) II y III E) I y II

93. Si el complejo $Z = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{b+ai}$

a y $b \in \mathbb{R}$ es el conjugado de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,

determine el valor de:

$$E = (a-1)^2 + (b-1)^2$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

94. Determine la relación que debe existir

entre m y n reales de modo que $\frac{m+5i}{3-ni}$

resulte un número imaginario puro.

- A) $2m = 3n$ B) $3m = 4n$ C) $3n = 5m$
D) $3m = 5n$ E) $3n = 2m$

95. Dados los siguientes enunciados

I. $\exists z \in \mathbb{C} / z^{-1} = -z$

II. $\exists z \in \mathbb{C} / z^2 = \bar{z} \quad (z \neq (0, 0))$

III. $\exists z \in \mathbb{C} / z^2 = -\bar{z} \quad (z \neq (0, 0))$

IV. $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(\bar{z}w), \forall z, w \in \mathbb{C}$

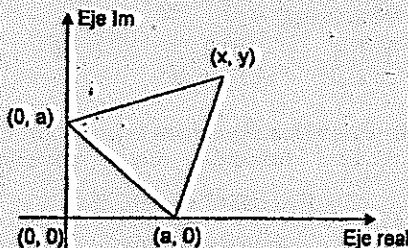
Cuál(es) son correctos:

- A) solo I B) II y III C) I y III
D) I, II y III E) I, II, III y IV

96. Sea z un número complejo tal que $\arg(z) \in (\pi, 3\pi/2)$ y $z \cdot \bar{z} + 2\bar{z} = 4(2-i)(1+i)$ Calcule $|z|$

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 2
D) 3 E) $\sqrt{6}$

97. Se sabe que los afijos de tres números complejos son los vértices de un triángulo equilátero de lado igual a 4mts, como se muestra en la figura adjunta. Determine el producto de estos tres números complejos.



- A) $8(\sqrt{2}+\sqrt{6})(1-i)$
B) $8(\sqrt{2}+\sqrt{6})(1+i)$
C) $8(\sqrt{2}-\sqrt{6})(1-i)$
D) $8(\sqrt{6}-\sqrt{2})(1-i)$
E) $8(\sqrt{6}+\sqrt{2})(-1+i)$

98. Sea $a_n \in \mathbb{C}$ tal que:

$$a_n = (1+i) \left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{i}{\sqrt{4}}\right) \left(1 + \frac{i}{\sqrt{5}}\right) \dots \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right); n \in \mathbb{Z}^+$$

Determine:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{n-1} - a_n|$$

- A) $\frac{1}{n}$ B) $n-1$ C) $\frac{1}{2n+1}$
D) $n-2$ E) $\frac{n}{n+1}$

99. La parte real de un complejo z , la componente imaginaria de z y la componente imaginaria de z^4 son entre sí como 1: 2: 3. Determine

$$\operatorname{Arg}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$$

- A) π B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{4}$
D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

100. Si 45° es el argumento del complejo; $a \in \mathbb{R}$

$Z = (1-a)\sqrt{1+i} + a(1+i)$, entonces su módulo es:

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

101. Dados los siguientes enunciados:

- I. El módulo del complejo

$$Z = 1 + \cos 74^\circ + i \sin 74^\circ \text{ es } \frac{12}{5}$$

- II. El argumento del complejo

$$Z = 1 + \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ \text{ es } 5^\circ$$

- III. El módulo del complejo

$$Z = 2i(1+i)(2+i)(3+i) \text{ es } 20$$

Cuál(es) son correctos:

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) II y III

102. Si $Z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, entonces determine un complejo w que satisfice la condición $|Z| = |Z+w| = |w|$.

- A) $\sqrt{2}(1+i)$ B) $1-i\sqrt{3}$ C) $1+i\sqrt{3}$
D) -2 E) $-1-i\sqrt{3}$

103. Dado los números complejos

$$Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, Z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ determine}$$

el módulo de $\frac{Z_1}{Z_2}$.

- A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 5

104. Sea $Z \in \mathbb{C}$, y $\bar{Z}$ su conjugada; se cumple que:

$$Z \cdot \bar{Z} + 2\bar{Z} = 12 + 4i, \arg(z) \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

calcule $|Z|$.

- A) $\sqrt{18}$ B) $\sqrt{20}$ C) 5
D) $\sqrt{27}$ E) $\sqrt{32}$

105. Sea $|Z|^2 = 3 \operatorname{Re}(Z)$.

Determine $|Z - 3/2|$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$
D) 2 E) $\frac{5}{2}$

106. Determine el módulo del complejo

$$Z = \left(1 + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$$

- A) $4 \cos \pi/8$ B) $4 \cos^2 \pi/8$
C) $4 \sin \pi/16$ D) $4 \sin^2 \pi/16$
E) $4 \cos^2 \pi/16$

107. Sea $Z \in \mathbb{C}$ tal que cumple:

$$|Z + Z_0| \leq a, \text{ donde } Z_0 = (a, a), a \in \mathbb{R}^+$$

Determine el argumento de Z cuya distancia a la recta vertical que pasa por $x = -3a$ sea mínima.

- A) $16,5^\circ$ B) $18,5^\circ$ C) 45°
D) 6° E) $\left(\frac{413}{2}\right)^\circ$

SOLUCIONARIO

4^{to} SEMINARIO - TALLER

ALGEBRA

①

$$\text{OBS: } f(x) = \frac{x}{x+4} = \frac{(x+4)-4}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4}$$

$$\text{ADEMÁS: } x \in [-1; 2]$$

$$\text{DE } -1 \leq x \leq 2 \rightarrow 3 \leq x+4 \leq 6$$

$$\text{INVIERTO: } \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+4} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{POR } -4: -\frac{4}{3} \leq -\frac{4}{x+4} \leq -\frac{2}{3}$$

$$\text{SUMO } 1: -\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{4}{x+4} \leq \frac{1}{3}$$

$$f(x)$$

$$\therefore \text{MÁX. VALOR DE } f: \frac{4}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ DE } f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}; x \in \mathbb{R} \dots (1)$$

$$\text{SABEMOS QUE: } x^2 < x^2+1; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{DIVIDO POR } x^2+1: \frac{x^2}{x^2+1} < 1$$

$$f(x)$$

$$\text{OBSERVESE, DE (1): } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow 0 < f(x) < 1$$

$$\text{POR CONDICIÓN: } f(x) \leq m$$



$$\therefore \text{MENOR "m": } 1$$

$$\textcircled{3} \text{ OBS: } f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2+7}; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{SABEMOS QUE: } (3x+2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{SUMO } 7: (3x+2)^2+7 \geq 7$$

$$\text{INVIERTO: } 0 < \frac{1}{(3x+2)^2+7} \leq \frac{1}{7}$$

$$\text{PODEMOS ESCRIBIR: } |f(x)| \leq \frac{1}{7}$$

$$\text{LUEGO, EL MENOR M SE OBTIENE}$$

$$\text{HACIENDO: } \frac{2}{3}M - 1 = \frac{1}{7} \rightarrow \frac{2}{3}M = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \text{MENOR "M": } \frac{12}{7}$$

$$\textcircled{4} \text{ } f(x) = x + \frac{1}{x}; x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{(*) Si } x > 0, \text{ SE SABE QUE: } x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$\hookrightarrow f(x) \geq 2 \quad (\alpha)$$

$$\text{Si } x < 0, \text{ TAMBIÉN DEBE CONDER}$$

$$\text{QUE } x + \frac{1}{x} \leq -2 \hookrightarrow f(x) \leq -2 \quad (\beta)$$

$$\text{DEFINICIÓN (b): } |f(x)| \geq 2$$

$$\hookrightarrow f \text{ NO ES ACOTADA EN } \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{(I) ES F}$$

$$\text{(**) POR LO ANTERIOR:}$$

$$\text{(II) ES V; (III) ES F}$$

$$\therefore \text{SÓLO (II) ES CORRECTO}$$

$$\textcircled{5} \text{ (I) LA FUNCIÓN } f(x) = \cos\left(\frac{2}{x}\right) \text{ ESTÁ ACOTADA SOBRE SU DOMINIO, PUES TO QUE: } \left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\Rightarrow (I) \text{ ES V}$

(*) $g(x) = 1 + \frac{1}{x}; x \in (10^{-5}; 10)$

• Si $10^{-5} < x < 10 \rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{x} < 10^5$

SUMO 1: $\frac{11}{10} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + 10^5$
 $g(x)$

LUEGO: $|g(x)| < 1 + 10^5$

OBJ: g ES FUNCIÓN ACOTADA

$\Rightarrow (I) \text{ ES F}$

(**) Si h_1 y h_2 son FUNCIONES ACOTADAS $\Rightarrow |h_1(x)| < m \wedge |h_2(x)| < n$ con $m, n > 0$.

DE AQUÍ:

$-m < h_1(x) < m \wedge -n < h_2(x) < n$
 (1) (2)

(1)+(2): $-(m+n) < h_1(x) + h_2(x) < m+n$

$\Rightarrow |h_1(x) + h_2(x)| < m+n$

OBJ: $h_1 + h_2$ ES FUNCIÓN ACOTADA
 $\Rightarrow (III) \text{ ES V}$

$\therefore (I) \text{ y } (III) \text{ son CORRECTAS}$

(*) $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; x \in \mathbb{R}$

• Si $x > 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \rightarrow x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3$

$\rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \geq 3 + 0 < \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 0 < h(x) \leq \frac{1}{3}; x > 0 \quad (*)$

• Si $x < 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \rightarrow x + \frac{1}{x} + 1 \leq -1$

$\rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \leq -1 \rightarrow -1 \leq \frac{x}{x^2 + 1} < 0$

$\Rightarrow -1 \leq h(x) < 0; x < 0 \quad (p)$

• Si $x = 0 \rightarrow h(x) = 0 \quad (q)$

DE (p) U (q) U (q), E TRUE:

$-1 \leq h(x) \leq \frac{1}{3} \Rightarrow |h(x)| \leq 1$

OBJ: h ES FUNCIÓN ACOTADA $\Rightarrow (I) \text{ ES V}$

(**) NO TODA FUNCIÓN BIYECTIVA ES ACOTADA. POR EJEMPLO, FUNCIÓN BIYECTIVA:

$f(x) = -x^2; x \in [0; +\infty)$

VAIÓ QUE: $f(x) \leq 0$

ES ACOTADO SUPERIORMENTE PERO NO INFERIORMENTE.

$\Rightarrow (II) \text{ ES F}$

(**) Si f ES ACOTADA $\Rightarrow |f(x)| \leq K$

DE AQUÍ: $-K \leq f(x) \leq K \quad (K > 0)$

$\Rightarrow g(-K) \leq g(f(x)) \leq g(K)$

$\Rightarrow |g(f(x))| \leq g(K); \forall x \in \text{DOM}(f)$
 $y f(x) \in \text{DOM}(g)$

$\Rightarrow (III) \text{ ES V}$

$\therefore (I) \text{ y } (III) \text{ son CORRECTAS}$

(*) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}; x > 0$

(*) Si $x > 0 \rightarrow x - 2 > -2 \rightarrow (x - 2)^2 > 0$
 $\rightarrow x^2 - 4x + 4 > 0$

• SUMO $6x$: $x^2 + 2x + 4 > 6x$

• DIVIDO POR x ($x > 0$): $\frac{x^2 + 2x + 4}{x} \geq 6$

INVIERTO: $0 < \frac{x}{x^2+2x+4} < \frac{1}{6}$

Obs: $0 < f(x) < \frac{1}{6}$; $\forall x > 0$

CON ESTO DECIMOS: $|f(x)| < \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ (I) es F; (II) es V; (III) es V

$\therefore$ (II) y (III) son CORRECTOS

⑧ $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $x \in (-1; 1)$

Si $-1 < x < 1 \rightarrow -2 < x-1 < 0$

INVIERTO: $\frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) < -\frac{1}{2}$

CON ESTO:

(I) es V; (II) es F; (III) es F;

(IV) es F $\therefore$ SÓLO (I) es CORRECTO

⑨ SEGÚN DATO, PODEMOS ESCRIBIR

$f(x) = \begin{cases} 3-3x; & -4 \leq x \leq 2 \dots f_1 \\ 5x-5; & 3 \leq x \leq 5 \dots f_2 \end{cases}$

DE $f_1(x) = 3-3x$; $-4 \leq x \leq 2$

• POR -3: $-6 \leq -3x \leq 12$

• SUMO 3: $-3 \leq 3-3x \leq 15$

$-3 \leq f_1(x) \leq 15$ (α)

DE $f_2(x) = 5x-5$; $3 \leq x \leq 5$

• POR 5: $15 \leq 5x \leq 25$

• RESTO 5: $10 \leq 5x-5 \leq 20$

$10 \leq f_2(x) \leq 20$ (β)

UNIÓN $f(x)$ y f_2 : $-3 \leq f(x) \leq 20$

$\therefore$ MÍN. VALOR DE $f = -3$

⑩ $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2+2x+2+1}$

Aquí: $f(1) = \frac{1}{3-2} = \frac{1}{9}$ (DATO)

DE DONDE: $\Delta = 3$

LUEGO: $f(x) = \frac{1}{2x^2+3x+4}$

COMPLETANDO CUADRADOS EN EL DENOMINADOR, SE PUEDE ESCRIBIR:

$f(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2+\frac{3}{2}x+2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{23}{16}} \right]$

AHORA: $(x+\frac{3}{4})^2 \geq 0 \rightarrow (x+\frac{3}{4})^2 + \frac{23}{16} \geq \frac{23}{16}$

INVIERTO: $0 < \frac{1}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{23}{16}} \leq \frac{16}{23}$

POR $\frac{1}{2}$: $0 < \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{23}{16}} \right] < \frac{8}{23}$

DE AQUÍ: $|f(x)| < \frac{8}{23}$

$\therefore$ IDENTIFICANDO: $K = \frac{8}{23}$

⑪ $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2+2} + \frac{1}{(x-1)^2+4}$ (1)

DONDE $x \in \mathbb{R}$

(*) PAREMOS BUEN: $(x-1)^2+2 \geq 2$

$$n \cdot 0 < \frac{1}{(x-1)^2+2} \leq \frac{1}{2} \dots (\alpha)$$

En forma análoga:

$$0 < \frac{1}{(x-1)^2+4} \leq \frac{1}{4} \dots (\beta)$$

$(\alpha) + (\beta)$:

$$= 0 < \frac{1}{(x-1)^2+2} + \frac{1}{(x-1)^2+4} \leq \frac{3}{4}$$

$f(x)$

$$\text{DE AQUÍ: } |f(x)| \leq \frac{3}{4}; \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow (I) \text{ ES V}$

(+ +) POR LO ANTERIOR: SI f ES FUNCIÓN ACOTADA $\forall x \in \mathbb{R}$; POR TANTO ES EVIDENTE QUE LO SERÁ $\forall x > 0$. $\Rightarrow (II) \text{ ES V}$

$$(+++)$$
 EN (I): $f(x-1) = \frac{1}{(x-2)^2+2} + \frac{1}{(x-2)^2+4}$

AHOR, PROCEDIENDO IGUAL QUE EN LA PARTE (I) DE ESTE PROBLEMA,

$$\text{SE OBTIENE: } |f(x-1)| \leq \frac{3}{4}$$

(VERIFIQUELO!)

$\Rightarrow (III) \text{ ES F}$

$\therefore (I) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$

$$(12) \cdot f_1(x) = x^2 + 2; 0 \leq x < 2$$

$$\text{OBS: SI } 0 \leq x < 2 \rightarrow 0 \leq x^2 < 4$$

$$\rightarrow 2 \leq x^2 + 2 \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq f_1(x) < 10 \quad (V)$$

$$\cdot f_2(x) = 10; 2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow f_2(x) = 10 \quad (B)$$

$$\cdot f_3(x) = \frac{10}{x}; x > 5$$

$$\text{OBS: SI } x > 5 \rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{5}$$

$$- 0 < \frac{10}{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < f_3(x) < 2 \quad (O)$$

UNIENDO (A), (B) y (O):

$$0 < f(x) \leq 10, \forall x > 0 \Rightarrow (I) \text{ ES F}$$

$$\text{ADEMÁS: } |f(x)| \leq 10$$

$$\Rightarrow (II) \text{ ES V y } (III) \text{ ES V}$$

$\therefore (II) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$

$$(13) \text{ DE } f(x) = \sqrt{9-x^2-1x^2-1}$$

$$\text{OBS: } 9-x^2-1x^2-1 > 0 \rightarrow 1x^2-1 \leq 9-x^2$$

DE AQUÍ:

$$9-x^2 > 0 \wedge -(9-x^2) \leq x^2-1 \leq 9-x^2$$

$$x^2 \leq 9 \wedge -9+1x^2 \leq x^2-1 \wedge x^2 \leq 9-x^2$$

$$x^2 \leq 9 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \leq 5$$

INTERSECTANDO: $x^2 \leq 5$

$$\text{O TAMBIÉN: } -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

PARA ANALIZAR EL SIGNO DE LA CANTIDAD DENTRO DE LAS BARRAS EN f , TRABAJEMOS CON $x^2 \leq 5$, Y LO ESCRIBIMOS ASÍ:

$$x^2 \leq 1 \vee 1 \leq x^2 \leq 5$$

(I)

(2)

$$\cdot \text{DE (1): SI } x^2 < 1 \rightarrow f_1(x) = \sqrt{9-x^2-(1-x^2)}$$

$$\rightarrow f_1(x) = 2\sqrt{2} \quad (A)$$

$$\cdot \text{DE (2): SI } 1 \leq x^2 \leq 5 \rightarrow f_2(x) = \sqrt{9-x^2-(x^2-1)}$$

$$\rightarrow f_2(x) = \sqrt{10-2x^2}$$

$$\text{OBS: COMO } 1 \leq x^2 \leq 5$$

$$\cdot \text{POR -2: } -10 \leq -2x^2 \leq -2$$

$$\cdot \text{SUMO 10: } 0 \leq 10-2x^2 \leq 8$$

$$\cdot \text{JACO F: } 0 \leq \sqrt{10-2x^2} \leq 2\sqrt{2}$$

$f_2(x)$

$$\rightarrow 0 \leq f_2(x) \leq 2\sqrt{2} \quad (P)$$

UNIENDO $(\alpha) \vee (\beta)$:

$$0 \leq f(x) \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow |f(x)| \leq 2\sqrt{2} \\ \forall x \in [-5; 5]$$

CON ESTO:

$$\cdot (I) \exists \forall \quad [-1; 1] \subset [-5; 5]$$

$$\cdot (II) \exists \forall \quad y \quad (III) \exists F$$

$\therefore (I) \vee (II) \text{ SON CORRECTOS}$

$$(14) (*) f(x) = 2|x| - x^2; x \in (-2; 2)$$

$$\text{OBJ: } |x|^2 = x^2$$

$$\hookrightarrow f(x) = 2 - 2|x| + |x|^2 = 1 - (1 - |x|)^2$$

$$\cdot \text{DE } -2 < x < 2 \rightarrow 0 \leq |x| < 2$$

$$\cdot \text{POR } -1: -2 < -|x| \leq 0$$

$$\cdot \text{SUMO } 1: -1 < 1 - |x| \leq 1$$

$$\cdot \text{AL } \square: 0 \leq (1 - |x|)^2 \leq 1$$

$$\cdot \text{POR } -1: -1 \leq -(1 - |x|)^2 \leq 0$$

$$\cdot \text{SUMO } 1: 0 \leq 1 - (1 - |x|)^2 \leq 1$$

$$\text{OBJ: } 0 \leq f(x) \leq 1 \rightarrow |f(x)| \leq 1$$

$$\Rightarrow (I) \exists \forall$$

$$(*) g(x) = \frac{x-1}{x+1}; x \in [0; 4]$$

$$g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$\text{SI } 0 \leq x \leq 4 \rightarrow 1 \leq x+1 \leq 5$$

$$\rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \rightarrow -2 \leq -\frac{2}{x+1} \leq -\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{x+1} \leq \frac{3}{5} \hookrightarrow -1 \leq g(x) \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{ADEMÁS (DATO): } g_2(x) = -1$$

$$\text{UNIENDO: } -1 \leq g(x) \leq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow (II) \exists \forall$$

$$(**) h(x) = \frac{-1}{x-1}; x \in [0; 3] - \{1\}$$

$$\text{OBJ: } \text{SI } 0 \leq x < 1 \vee 1 < x \leq 3$$

$$\cdot \text{POR } 1: -1 \leq x-1 < 0 \vee 0 < x-1 \leq 2$$

$$\cdot \text{INVIERTO: } \frac{1}{x-1} \leq -1 \vee \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{2}$$

$$\cdot \text{POR } -1: \frac{-1}{x-1} \geq 1 \vee \frac{-1}{x-1} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow h_1(x) \geq 1 \vee h_2(x) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\text{UNIENDO: } h(x) \leq -\frac{1}{2} \vee h(x) \geq 1$$

$$\text{CON ESTO, (III) } \exists F$$

$$\therefore (I) \vee (II) \text{ SON CORRECTOS}$$

(15)

$$f(x) = \frac{16 - 2^x \cdot 2^3}{8} = \frac{8(2 - 2^x)}{8}$$

$$\rightarrow f(x) = 2 - 2^x; \text{DOM}(f) = \mathbb{R}$$

(*) PERO SI $x > 1$ ENTONCES, DANDO

$$\text{BASE 2: } 2^x > 2^1 \rightarrow \frac{2 - 2^x}{f(x)} < 0$$

$$\text{O SEA: } \forall x \in [1; \infty): f(x) < 0$$

$$\Rightarrow (I) \exists F$$

$$(**) \text{ SEA } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{SI } x_1 < x_2 \rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \rightarrow -2^{x_1} > -2^{x_2}$$

$$\rightarrow -2 - 2^{x_1} > -2 - 2^{x_2} \rightarrow \underline{f(x_1) > f(x_2)}$$

CONCLUSIÓN: f ES DECRECIENTE
 $\Rightarrow$ (II) ES F

(*) SEA: $y = 2 - 2^x \rightarrow y - 2 = -2^x$

DE AQUÍ: $y - 2 = 0 \rightarrow y = 2$

ES UNA ASÍNTOTA
 HORIZONTAL

$\Rightarrow$ (III) ES V

$\therefore$ SÓLO (III) ES CORRECTA

(16) SIENDO $f(x) = \frac{7^x}{1+7^x}$; $x \in [1; +\infty)$

SE TIENE:

$\text{DOM}\left(\frac{f}{f}\right) = \text{DOM } f$; $f(x) \neq 0$

$\Rightarrow \text{DOM}\left(\frac{f}{f}\right) = [1; +\infty)$

CÁLCULO DEL RANGO:

SI $x > 1 \rightarrow 7^x > 7^1 \rightarrow 0 < \frac{1}{7^x} < \frac{1}{7}$

SUMO 1: $1 < 1 + \frac{1}{7^x} \leq \frac{8}{7}$

$1 < \frac{1+7^x}{7^x} \leq \frac{8}{7}$

INVIERTO: $\frac{7}{8} \leq \frac{7^x}{1+7^x} < 1$
 $f(x)$

$\Rightarrow \text{RAN}(f) = \left[\frac{7}{8}; 1\right)$

$\therefore \text{DOM}\left(\frac{f}{f}\right) \cup \text{RAN}(f) = \left[\frac{7}{8}; +\infty\right)$

(17) REDEFINIENDO f :

$f(x) = \begin{cases} 2^x - 2^{-x} = 0 & ; x > 0 \dots f_1 \\ 2^x - 2^{-x} & ; x < 0 \dots f_2 \end{cases}$

DE f_1 : $\text{RAN}(f_1) = \{0\}$

DE $f_2 = 2^x - 2^{-x}$; $x < 0$

SI $x < 0 \rightarrow 2^x < 0 \rightarrow x < -x$

DADO BASE 2: $2^x < 2^{-x}$

$\rightarrow 2^x - 2^{-x} < 0 \rightarrow f_2(x) < 0$

$\Rightarrow \text{RAN}(f_2) = (-\infty; 0)$

FINALMENTE:

$\text{RAN}(f) = \text{RAN}(f_1) \cup \text{RAN}(f_2)$

$= \{0\} \cup (-\infty; 0)$

$\therefore \text{RAN}(f) = (-\infty; 0] \checkmark$

(18) DE $f(x) = \sqrt[3]{2^x - 2^9}$
 OBS: $2^x - 2^9 \geq 0 \rightarrow 2^x \geq 2^9$

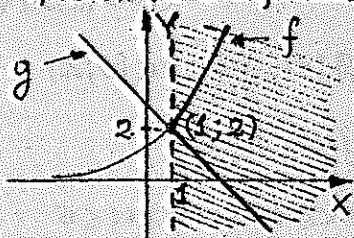
DE AQUÍ: $x^2 \geq 9 \rightarrow x \leq -3 \vee x \geq 3$

$\therefore \text{DOM}(f) = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty) \checkmark$

(19) DE $f(x) = \sqrt{2^x + x - 3}$

OBS: $2^x + x - 3 \geq 0 \rightarrow 2^x \geq 3 - x$

GRAFIQUEMOS $f(x)$ $g(x)$
 EL DOMINIO ESTARÁ DADO POR TODOS LOS x QUE VERIFICAN LA DESIGUALDAD.



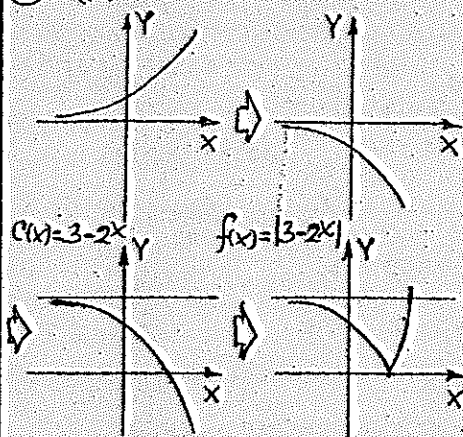
OBS: $x = 1$ SATISFACE LA DESIGUALDAD.

OBS: EN LA PARTE SOMBRREADA SE UBICAN LOS "x" QUE VERIFICAN QUE $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \geq 1$

$\therefore \text{DOM}(f) = [1; +\infty) \checkmark$

20) $A(x) = 2^x$

$B(x) = -2^x$



GRÁFO APROX. (C) (22)

21) Obs: $e^{2-|x|} + 2 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |e^{2-|x|} + 2| = e^{2-|x|} + 2$

Definire: $f(x) = e^{2-|x|} + 2 - 1$

$f(x) = e^{2-|x|} + 1$

Además:

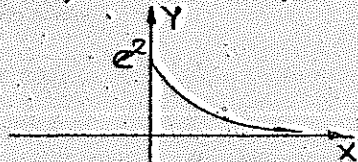
$f(-x) = e^{2-|-x|} + 1 = f(x)$

$\Rightarrow f$ es función par

BASTARÁ CON GRAFICAR PARA $x \geq 0$,
LUEGO SE REFLEJARÁ SOBRE EL EJE
Y ESTA PARTE DE LA GRÁFICA.

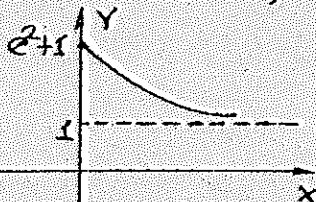
Si $x \geq 0 \rightarrow f(x) = e^{2-x} + 1$

TABULANDO, LA GRÁFICA DE $f(x) = e^{2-|x|} + 1$
PARA $x \geq 0$ VIENE DADO POR:



OJO: $y = 0$ ES ASÍNTOTA HORIZONTAL

LA GRÁFICA DE $h(x) = e^{2-x} + 1; x \geq 0$



FINALMENTE, REFLEJANDO ESTA
GRÁFICA DE h SOBRE EL EJE Y, SE
OBTIENE LA GRÁFICA DE f .

$\therefore$ GRÁF. APROXIMADO (D) (X)

(*) DE f y $g: x \in \mathbb{R}$

Además: $f(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})^2$
 $g(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})^2$ (*)

RESTANDO Y APLICANDO LEGRANGE:

$f(x) - g(x) = \frac{1}{4} [4(e^{2x})(e^{-2x})]$

$\rightarrow f(x) - g(x) = 1 \Rightarrow$ EL RANGO

DE $f(x) - g(x)$ ES $\{1\} \rightarrow (I) \text{ ES F}$

(**) Obs: $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4}(e^{4x} - e^{-4x})$

DONDE $x \in \mathbb{R}$

Sea: $x_1 < x_2 \rightarrow 4x_1 < 4x_2$

$\rightarrow e^{4x_1} < e^{4x_2} \quad (a)$

$x_1 < x_2 \rightarrow -4x_1 > -4x_2$

$\rightarrow e^{-4x_1} > e^{-4x_2} \quad (b)$

$$(x) - (3): e^{4x_1} - e^{-4x_1} < e^{4x_2} - e^{-4x_2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} (e^{4x_1} - e^{-4x_1}) < \frac{1}{4} (e^{4x_2} - e^{-4x_2})$$

$$(f \cdot g)(x_1) < (f \cdot g)(x_2)$$

Obs: $f \cdot g$ ES CRECIENTE POR TANTO ES MONÓTONA $\Rightarrow$ (II) ES V

(*)+4) APLICANDO LEGENDRE, SE TIE-

$$NE: f^2(x) + g^2(x) = \frac{1}{4} [2(e^{4x} + e^{-4x})]$$

$$f^2(x) + g^2(x) = \frac{1}{2} (e^{4x} + e^{-4x}) \quad (*)$$

$$\text{PERO: } f(2x) = \frac{1}{2} (e^{4x} + e^{-4x}) \quad (*)$$

$\Rightarrow$ (III) ES V

$\therefore$ (II) y (III) SON CORRECTOS

$$23) \text{ Obs: } f(x) = \log x$$

$$g(x) = \log x = \log x^{-1} \rightarrow g(x) = -\log x$$

$$\text{LUEGO: } f(b) + g(b) = 0 \Rightarrow (I) \text{ ES F}$$

$$\text{ADEMÁS: } g(b) - f(b) = -2 \log b \dots (*)$$

"EN UNA BASE ENTRE 0 y 1, LOS NÚMEROS MAYORES QUE 1 ($b > 1$) TIENEN LOGARITMOS NEGATIVOS"

$$\text{OJEA: } \log b < 0 \rightarrow -2 \log b > 0$$

$$\text{EN (x): } g(b) - f(b) > 0 \Rightarrow (III) \text{ ES V}$$

$$(+) \text{ Si } 0 < a < 1 \wedge b \in \mathbb{R}; a > 0 \Rightarrow 0 < b < 1$$

"EN UNA BASE ENTRE 0 y 1 ($0 < a < 1$), LOS NÚMEROS COMPREDIDOS ENTRE 0 y 1 ($0 < b < 1$) TIENEN LOGARITMOS POSITIVOS"

$$\text{CON ESTO: } f(b) = \log b > 0$$

$$g(b) = -\log b < 0$$

$$\text{LUEGO: } \underbrace{f(b) > 1}_F \vee \underbrace{g(b) < -1}_F \equiv F \Rightarrow (III) \text{ ES F}$$

$\therefore$ SÓLO (II) ES CORRECTO

$$24) \text{ DE } f(x) = \log_{1/2}(\log(x-3))$$

$$\text{Obs: } x-3 > 0 \wedge \log_2(x-3) > 0$$

$$x > 3 \wedge x-3 > 1$$

$$\underline{x > 3 \wedge x > 4}$$

$$\text{DE AQUI: } x > 4 \text{ ó } x \in (4; +\infty)$$

CON ESTO:

$$(I) \text{ ES F; (II) ES V; (III) ES F}$$

$\therefore$ SÓLO (II) ES CORRECTO

$$25) \text{ DE } f(x) = 4 \sqrt{\log \sqrt{\log(14 - |x^2 - 5|)}}$$

$$\text{HAGAMOS: } 14 - |x^2 - 5| = a$$

$$\text{Obs: } a > 0 \wedge \log a > 0 \wedge \sqrt{\log a} > 0 \wedge \log \sqrt{\log a} > 0$$

$$a > 0 \wedge a > 1 \wedge \log a > 0 \wedge \sqrt{\log a} > 1$$

$$a > 0 \wedge a > 1 \wedge a > 1 \wedge a > 10$$

$$\text{INTERSECCIÓN: } a > 10$$

$$\Rightarrow 14 - |x^2 - 5| > 10 \rightarrow |x^2 - 5| < 4$$

$$-4 < x^2 \leq 4 \rightarrow 1 \leq x^2 \leq 9$$

DE AQUÍ: $-3 \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq 3$

$$\therefore \text{DOM}(f) = [-3; -1] \cup [1; 3]$$

26) DE LA FUNCIÓN f :

$$\frac{|x|-1}{|x+2|-2} > 0 \wedge |x-2| > 0 \wedge 1 + \lg|x-2| > 0$$

(1)

(2)

(3)

DE (1): $|x|-1 > 0 \wedge |x+2|-2 > 0$ (a)

v

$$|x|-1 < 0 \wedge |x+2|-2 < 0$$
 (b)

DE (a): $(x < -1 \vee x > 1) \wedge (x < -4 \vee x > 0)$

INTERSECTANDO: $x < -4 \vee x > 1$ S_a

DE (b): $(-1 < x < 1) \wedge (-4 < x < 0)$

INTERSECTANDO: $-1 < x < 0$ S_b

UNIONADO $S_a \cup S_b$:

$$x < -4 \vee -1 < x < 0 \vee x > 1$$
 S_1

DE (2): $|x-2| > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{2\}$ S_2

DE (3): $1 + \lg|x-2| \neq |x-2|$

$$\lg 10|x-2| \neq |x-2|$$

DE AQUÍ: $10|x-2| \neq 10^{|x-2|}$

es: $x \neq 1; 3$ S_3

INTERSECTAMOS S_1 ; S_2 y DESCON-
TAMOS S_3 ; SE OBTIENE:

$$x < -4 \vee -1 < x < 0 \vee x > 1 \text{ con } x \neq 2; 3$$

$$\therefore \text{DOM}(f) = \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle - \{2; 3\}$$

DE AQUÍ:

$$\text{DOM}(f) = [-4; -1] \cup [0; 1] \cup \{2; 3\}$$

$$\therefore \text{DOM}(f) \cap \mathbb{Z} = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

27) DE $f(x) = \lg_{-4x^2} (x-2|x+1|) + 2$

$$(1) \lg_2 (1 - \lg_2 x)$$

(2)

DE (2):

$$x > 0 \wedge 1 + \lg_2 x > 0 \wedge 1 + \lg_2 x \neq 1 \wedge$$

$$1 - \lg_2 x > 0$$

DE AQUÍ, OBTENEMOS:

$$x > 0 \wedge x > \frac{1}{2} \wedge x \neq 1 \wedge \frac{1}{2} < x < 2$$

INTERSECTANDO: $\frac{1}{2} < x < 2; x \neq 1$ S_2

OJO: USAMOS S_2 PARA RESOLVER
 S_1 (OJO: x ES POSITIVO):

DE (1):

$$-4x^2 > 0 \wedge -4x^2 \neq 1 \wedge x-2|x+1| > 0$$

$$x(x-4) > 0 \wedge x^2 - 4x - 1 \neq 0 \wedge x-2|x+1| > 0$$

ES (+)

$$\phi x-4 > 0 \wedge x \neq 2 \pm \sqrt{5} \wedge x < 1$$

$$\wedge x > 4 \wedge x \neq 2 \pm \sqrt{5} \wedge x < 1$$

INTERSECTANDO: $x \in \phi$ S_1

LUEGO: $\text{DOM}(f) = S_1 \cap S_2$
 $\Rightarrow \text{DOM}(f) = \phi$

28) DE $f(x) = 2^{\lg x}$; $x > 0$

SEA $y = 2^{\lg x}$; OBSÉRVESE QUE: $y > 0$

POR DEFINICIÓN: $\lg y = \lg 2^{\lg x}$

ADICIONALMENTE: $x = 3^{\lg y}$

INTERCAMBIANDO x POR y :

$$y = f^*(x) = 3^{\log x}$$

donde: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ = \text{Dom}(f^*)$
($x \in \mathbb{R}^+$)

29) DE $f(x) = 4\sqrt{\log_7(x^2 - 2x - 8) - 1}$

Obs: $x^2 - 2x - 8 > 0 \wedge \log_7(x^2 - 2x - 8) - 1 \geq 0$

$x^2 - 2x - 8 > 0 \wedge x^2 - 2x - 8 \geq 7$

Intersección: $x^2 - 2x - 8 \geq 7$

$x^2 - 2x - 15 \geq 0 \wedge (x-5)(x+3) \geq 0$

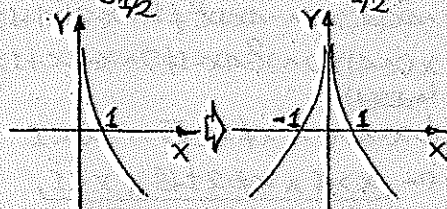
De aquí: $x \leq -3 \vee x \geq 5$

$\therefore \text{Dom}(f) = (-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$

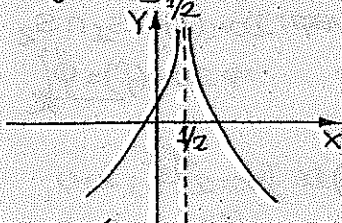
30) $f(x) = \log_{1/2}|x - 1/2|$

* $A(x) = \log_{1/2} x$

* $B(x) = \log_{1/2}|x|$



* $f(x) = \log_{1/2}|x - 1/2|$



Según la gráfica:

(I) es F; (II) es F; (III) es V

$\therefore$ sólo (III) es correcto

31) (*) Si $0 < b < 1$ y $0 < x < y$ entonces

$\log_b x > \log_b y$ / El sentido de la desigualdad se invierte!

$\Rightarrow$ (I) es F

(*) Si $b > 1$ y $0 < x < y$ entonces

$\log_b x < \log_b y$ / El sentido de la desigualdad se mantiene!

$\Rightarrow$ (II) es V

(***) Si $0 < b < 1$ y $0 < x < y$ entonces

$b^x > b^y$ / El sentido de la desigualdad se invierte!

$\Rightarrow$ (III) es F

$\therefore$ sólo (II) es correcto

32) DE $\log_5 6 = a \rightarrow \log_5 2 + \log_5 3 = a$

$\rightarrow \log_5 2 = a - \log_5 3$

• DE $\log_{1/2} 3 = b \rightarrow \frac{\log_5 3}{\log_5 1/2} = b$

$\rightarrow \frac{\log_5 3}{2 \log_5 2 + \log_5 3} = b \dots (*)$

(*) EN (*): $\frac{\log_5 3}{2(a - \log_5 3) + \log_5 3} = b$

$\frac{\log_5 3}{2a - \log_5 3} = b \rightarrow \log_5 3 = 2ab - b \log_5 3$
 $\therefore \log_5 3 = \frac{2ab}{b+1}$

33) Hagamos: $\log_b n = x \wedge \log_n a = y$

De aquí: $\log_b n \cdot \log_n a = xy$

DEMOS:

$$* \log_b^2 n^2 = 4 \log_b^2 n = 4x^2$$

$$+ \log_n^2 3 = 9 \log_n^2 3 = 9y^2$$

REEMPLAZANDO EN LA IGUALDAD:

$$8x^2 + 9y^2 - 15y + 4 = 18x - 18xy$$

$$8x^2 + 18xy + 9y^2 - 18x - 15y + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 4x \\ 2x \end{array} \begin{array}{r} 3y \\ 3y \end{array} \begin{array}{r} -1 \\ -4 \end{array}$$

$$\rightarrow (4x + 3y - 1)(2x + 3y - 4) = 0$$

DE AQUI: $2x + 3y - 4 = 0$

RECONOCIENDO: $2 \log_b n + 3 \log_n 3 = 4$

$$\therefore \log_b n^2 + \log_n 3^3 = 4$$

(31) $\log_b(\log_b x) = \log_b(\log_b x)$

$\forall x > 0$ con $b > 0 \wedge b \neq 1$
 $\Rightarrow$ (I) es F

(*) ASUMIENDO QUE a y b SON POSITIVOS,

Si $a^x = b^x \wedge x \neq 0 \Rightarrow a = b$
 $\Rightarrow$ (II) es V

(***) $f(x) = a^x$ es FUNCIÓN CRECIENTE

$\forall a > 1 \Rightarrow$ (III) es F

$\therefore$ SÓLO (II) ES CORRECTO

(32) TRANSFORMANDO:

$$\frac{1}{x} \log_b \log_b x + \log_x \left(\frac{4-x}{10} \right) = (\log_b \log_b n - 1) \log_x 10$$

1

$$(1) \log_x \left(\frac{4-x}{10} \right) = \log \left(\frac{\log n}{10} \right) \cdot \log_{10} x$$

$$\log_x x + \log_x \left(\frac{4-x}{10} \right) = \log_x \left(\frac{\log n}{10} \right)$$

$$\cancel{\log_x \left(\frac{4-x}{10} \right)} = \cancel{\log_x \left(\frac{\log n}{10} \right)}$$

$$\text{DE AQUI: } x(4-x) = \frac{\log n}{10}$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + \log n = 0$$

COMO "x" ES ÚNICO $\Rightarrow \Delta = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(\log n) = 0$$

$$\rightarrow \frac{16}{4} = 4 \log n \rightarrow \log n = 4$$

$$\therefore n = 10000$$



36

$$\log_2 \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \log_2 2^{-1} = -\log_2 2 = -1$$

REEMPLAZANDO EN LA IGUALDAD:

$$\log_2 \left[\frac{1}{2} (\log_2 2 + \log_2 b) \right] = (\log_2 2 + \log_2 b) \times (\log_2 2 - \log_2 b)$$

DE AQUÍ:

$$\log_2 \left[\frac{1}{2} \log_2 2 \right] = \log_2 2 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{b} \right)$$

$$\log_2 (1/2) = \log_2 (1/b) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = 2$$

NOSE PIDE $f(2)$, SI $f(x) = \text{antilog}_2 x + \log_2 x$

$$f(2) = \text{antilog}_2 2 + \log_2 2 = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$$

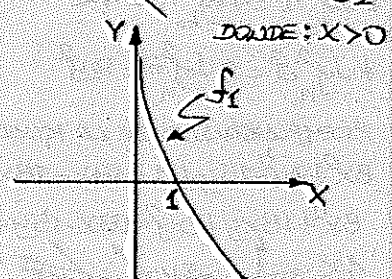
37) DE $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 (x^2) \dots (I)$

OBSÉRVESE QUE x y $-x \in \text{DOM}(f)$ y ADemás: $f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow f$ ES UNA FUNCIÓN PAR

• GRAFÍQUEMOS PARA $x > 0$ y LUEGO REFLEJAMOS ESTA GRÁFICA A LO LARGO DEL EJE Y.

DE (I): $f_1(x) = \frac{1}{2} [2(-\log_2 x)] = -\log_2 x$



AHORA, REFLEJANDO ESTA GRÁFICA SOBRE EL EJE Y, SE OBTIENE LA GRÁFICA DE f . $\therefore$ CLAVE: C

38) SEA $N = 0,006^{60} = \left(\frac{6}{10^3} \right)^{60}$

TOMAMOS LOGARITMOS Y APLICAMOS PROPIEDADES:

$$\log N = 60 (\log 6 - \log 10^3) = 60 (\log 2 + \log 3 - 3) = -2,221849$$

$$\rightarrow \log N = -133,31094$$

$$= \boxed{-134} + 0,68906$$

↳ CARACTERÍSTICA

$\Rightarrow$ DE ACUERDO A LO PEDIDO, N TIENE 133 CEROS

39) SEA $N = 7^{12} \cdot 2^8$

TOMAMOS LOGARITMOS Y APLICAMOS PROPIEDADES:

$$\log N = 12 \log 7 + 8 \log (2^2 \cdot 3) = 12 \log 7 + 16 \log 2 + 8 \log 3 = 4(3 \log 7 + 4 \log 2 + 2 \log 3)$$

REEMPLAZANDO VALORES:

$$\lg N = 18,774528$$

$$= \boxed{18} + 0,774528$$

CARACTERÍSTICA

 $\therefore N \text{ TIENE 19 CIFRAS}$

$$40) \text{ ASUMAMOS: } x = \overbrace{abcdef}^{\text{6 CIFRAS}}, mnp$$

DONDE: $0 < mnp$

$$\hookrightarrow \lg x = 5 + \boxed{\text{MANTISA}}$$

DONDE: $0 < \text{MANTISA} < 1$

$$\hookrightarrow 5 < \lg x < 6 \text{ ó } \lg x \in (5; 6)$$

41) POR TEORÍA:

(I) ES CORRECTO

(II) ES INCORRECTO

EN ESTOS CASOS LA MANTISA
NO VARÍA, LO QUE VARÍA ES
LA CARACTERÍSTICA.

(III) ES CORRECTO.

 $\therefore \text{SON CORRECTOS (I) y (III)}$
42) "FACTORIZAMOS" $4^x - 1$:

$$\hookrightarrow 4^x - 1 = (4 - 1) = 3 \times 8$$

$$\rightarrow 2^{2(x-1)} = 2^3 \hookrightarrow 2(x-1) = 3$$

DE AQUÍ: $x = \frac{5}{2}$

LUEGO:

$$(2x)^x = 5^{\frac{5}{2}} = \sqrt{5^4 \cdot 5} = 25\sqrt{5}$$

43) ESCRIBIMOS: $2^x \cdot 2 + (2^x)^2 = 80$

$$\rightarrow (2^x)^2 + 2(2^x) - 80 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2^x & & 10 \\ 2^x & \times & -8 \end{array}$$

$$(2^x + 10)(2^x - 8) = 0$$

$$\text{ES (H) } \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow 2^x - 8 = 0$$

$$2^x = 2^3 \quad \therefore x = 3$$

$$41) \text{ OBF: } 4 \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow 4 \sqrt[3]{8} = 3 \frac{1}{3}$$

REEMPLAZANDO:

$$\left(\sqrt[3]{9 \cdot 9} \right)^{\sqrt[3]{27}} = 27^x$$

$$27^9 = 27^x; \text{ BASES IGUALES}$$

$$\hookrightarrow \left(\sqrt[3]{9 \cdot 9} \right)^{\sqrt[3]{27}} = x \rightarrow x = 2 \sqrt[3]{3}$$

$$\rightarrow x = 2 \frac{2}{3} \quad \therefore x = \frac{34}{15}$$

$$44) \text{ DE } (TX)^{\sqrt[3]{7}} = (5X)^{\sqrt[3]{5}}$$

TOMANDO LOGARITMOS EN BASE "a":

$$\lg 7 \cdot \lg (TX) = \lg 5 \cdot \lg (5X)$$

$$\lg 7 (\lg 7 + \lg X) = \lg 5 (\lg 5 + \lg X)$$

EFECTUANDO Y TRANSPONIENDO:

$$\lg^2 7 - \lg^2 5 = \lg 5 \cdot \lg X - \lg 7 \cdot \lg X$$

$$\lg^2 7 - \lg^2 5 = - \lg X (\lg 7 - \lg 5)$$

$$(\lg 7 + \lg 5)(\lg 7 - \lg 5)$$

$$\log_3 7 + \log_3 5 = -\log_3 x$$

$$\log_3 35 = \log_3 x^{-1} \therefore x = \frac{1}{35}$$

46) TRANSFORMANDO:

$$\frac{1}{\log_3(x-1)} = 2 - \log_3(x-1)$$

$$\text{OBS: } x > 1 \wedge x \neq 2$$

DE LA ECUACIÓN:

$$1 = 2 \log_3(x-1) - \log_3^2(x-1)$$

$$\text{P} \quad \log_3^2(x-1) - 2 \log_3(x-1) + 1 = 0$$

CONOCIDO

$$\text{no } (\log_3(x-1) - 1)^2 = 0 \rightarrow \log_3(x-1) = 1$$

$$\rightarrow \therefore x = 4$$

47) DE $f(x) = \log_2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})$

$$\text{OBS: } 2+x > 0 \wedge 2-x > 0 \wedge 2$$

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} > 0$$

$$\text{P} \quad x > -2 \wedge x \leq 2$$

$$x > -2 \wedge x \leq 2$$

$$\underline{x > -2 \wedge x \leq 2}$$

$$\text{DE AQUÍ: } -2 < x \leq 2$$

TRANSFORMAMOS LA EXPRESIÓN MOSTRANDO A RADICAL DOBLE, ASÍ:

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^2}$$

$$= \sqrt{4 + 2\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{AHORA, DE } -2 \leq x \leq 2$$

$$\bullet \text{AL } \square: 0 \leq x^2 \leq 4$$

$$\bullet \text{POR } -1: -4 \leq -x^2 \leq 0$$

$$\bullet \text{SUMO 4: } 0 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

$$\bullet \text{DADO } \sqrt{}: 0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$$

$$\bullet \text{POR } 2: 0 \leq 2\sqrt{4-x^2} \leq 4$$

$$\bullet \text{SUMO 4: } 4 \leq 4 - 2\sqrt{4-x^2} \leq 8$$

$$\bullet \text{DADO } \sqrt{}: 2 \leq \sqrt{4-2\sqrt{4-x^2}} \leq 2\sqrt{2}$$

$$2 \leq \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\text{OBS: } 0 < f(x) \leq 2 \therefore \text{Rango}(f) = [2; 2\sqrt{2}]$$

48) $(23)^{\frac{x+3}{x+1}} < (25)^{\frac{2x+5}{x-1}}$

$$2^{\frac{3(\frac{x+3}{x+1})}{2}} < 2^{\frac{5(\frac{2x+5}{x-1})}{2}}; (2 > 1)$$

$$\hookrightarrow 3\left(\frac{x+3}{x+1}\right) < 5\left(\frac{2x+5}{x-1}\right)$$

$$\text{DE AQUÍ: } \frac{30x+25}{x-1} - \frac{3x+9}{x+1} > 0$$

$$\text{P} \quad \frac{7x^2+29x+34}{(x-1)(x+1)} > 0 \quad (I)$$

$$\text{OBS: } (7x^2+29x+34) \text{ es } (+) \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{DADO QUE: } \Delta < 0$$

$$\hookrightarrow \text{DE (I): } (x-1)(x+1) > 0$$

$$\rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\therefore \text{C.S.} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

49) DE $\pi - \sqrt{2x-1} < \pi^{\frac{x^2+1}{2}}; (\pi > 1)$

$$\Rightarrow -\sqrt{2x-1} < x^2+1 \text{ ó } x^2+1 > -\sqrt{2x-1}$$

DE AQUÍ: $2x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \mid S_1$

USEMOS S_1 PARA RESOLVER LA OTRA DESIGUALDAD:

.. DE $\pi^{\sqrt{x^2+1}} > \pi^{2x-1}; (\pi > 1)$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 2x-1$; PERO $x > \frac{1}{2}$

AL $\square$: $x^2+1 > 4x^2-4x+1$

$\Rightarrow x(3x-4) < 0 \rightarrow 0 < x < \frac{4}{3} \mid S_2$

$\cdot S_1 \cap S_2: \frac{1}{2} < x < \frac{4}{3} \text{ ó } x \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$a = \frac{1}{2} \wedge b = \frac{4}{3} \therefore T = ab = \frac{2}{3}$

50 DE $(x-1)^{\sqrt{x-2}} < (x-1)^{\frac{x-2}{3}} \dots (I)$

Obs: $x-2 > 0 \rightarrow \underline{x \geq 2}$ CONDICIÓN NECESARIA (α)

DE (I), ANALICEMOS DOS CASOS:

(1°) $x-1 > 1 \wedge \sqrt{x-2} < \frac{x-2}{3}$

$x > 2 \wedge 9(x-2) < (x-2)^2$

$x > 2 \wedge x > 11$

$x > 11 \mid S_1$

(2°) $0 < x-1 < 1 \wedge \sqrt{x-2} > \frac{x-2}{3}$

$1 < x < 2$ AQUÍ: $\nexists x$
CON ESTO

LUEGO; AQUÍ: $x \in \emptyset \mid S_2$

$\therefore C.S. = (S_1 \cup S_2) \cap (\alpha)$

$= \langle 11; +\infty \rangle \cap [2; +\infty)$

$\therefore C.S. = \langle 11; +\infty \rangle$

IDENTIFICANDO: $m = 11$

$\therefore m^2 = 121$

51 DE $2^{\log x} < x^3 \dots (I)$

Obs: $\underline{x > 0}$ CONDICIÓN NECESARIA

EN (I), TOMAMOS LOGARITMOS:

$\log x \cdot \log 2 < 3 \log x$

$\log x (3 - \log 2) > 0$

ESTO ES (+)

$(\log 2 = 0,301030)$

$\therefore$ DE AQUÍ: $\log x > 0 \rightarrow x > 1$

INTERSECTANDO CON LA CONDICIÓN NECESARIA: $x > 1$

$\therefore C.S. = \langle 1; +\infty \rangle$

52 DE $(e^{2x} - 4)(x-2) > 0$

$(e^x + 2)(e^x - 2)(x-2) > 0$

ESTO $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ DE AQUÍ: $(e^x - 2)(x-2) > 0$

ANALICEMOS DOS CASOS:

(1) $e^x - 2 > 0 \wedge x - 2 > 0$

$\vee$

(2) $e^x - 2 < 0 \wedge x - 2 < 0$

DE (1): $\underline{e^x > 2} \wedge x > 2$

TOMAMOS LOGARITMO NATURAL:

$-x > \ln 2 \wedge x > 2$

$$x < -\ln 2 \wedge x > 2$$

$$\text{INTERSECTANDO: } x \in \phi \mid S_1$$

$$\text{DE (2): } e^{-x} < 2 \wedge x < 2$$

$$-x < \ln 2 \wedge x < 2$$

$$x > -\ln 2 \wedge x < 2$$

$$\text{INTERSECTANDO: } -\ln 2 < x < 2 \mid S_2$$

$$\text{C.S.} = S_1 \cup S_2 = (-\ln 2; 2) \setminus \{x\}$$

$$\textcircled{53} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{1-\log_2 x} > \left(\frac{4}{9}\right)^{2+2\log_2 x} \quad ; \quad \text{OJO} \quad x > 0$$

TRANSFORMANDO:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x - 1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2(2+2\log_2 x)}$$

$$0 < \text{BASE} < 1$$

$$\Rightarrow \log_2 x - 1 \leq 4 + 4\log_2 x$$

$$\rightarrow \log_2 x - 4\log_2 x - 5 \leq 0$$

FACTORIZANDO:

$$\left(\log_2 x + 1\right)\left(\log_2 x - 5\right) \leq 0$$

$$\rightarrow -1 \leq \log_2 x \leq 5$$

TOMANDO ANTILOGARITMO EN BASE 2:

$$\text{Antilog}_2(-1) \leq x \leq \text{Antilog}_2 5$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 32$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left[\frac{1}{2}; 32\right] \setminus \{x\}$$

DE LA INECUACIÓN:

$$2^x - 2 > 0 \wedge 2^{x+1} - 4 > 0$$

$$2^x > 2^1 \wedge 2^{x+1} > 2^2$$

$$\text{DE AQUÍ: } x > 1 \mid (\alpha)$$

DE LA INECUACIÓN, TRANSFORMANDO LA:

$$\log_2(2^x - 2) \cdot [-\log_2(2^x - 2)] > -2$$

MULTIPLICO POR (-1):

$$\log_2(2^x - 2) \cdot \log_2[2(2^x - 2)] < 2$$

$$\log_2(2^x - 2) \cdot [1 + \log_2(2^x - 2)] < 2$$

$$\text{DE AQUÍ: } \log_2^2(2^x - 2) + \log_2(2^x - 2) - 2 < 0$$

$$\text{FACTORIZO: } (\log_2(2^x - 2) + 2)(\log_2(2^x - 2) - 1) < 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } -2 < \log_2(2^x - 2) < 1$$

$$\rightarrow 2^{-2} < 2^x - 2 < 2^1 \rightarrow \frac{9}{4} < 2^x < 4$$

TOMANDO LOGARITMOS EN BASE 2:

$$\log_2(9/4) < x < 2$$

INTERSECTANDO CON (α) , SE OBTIENE:

$$\log_2(9/4) < x < 2$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left(\log_2(9/4); 2\right) \setminus \{x\}$$

$$\textcircled{54} \text{ DE } \log_8(3 - |x|) < \log_6(|x| - 1)$$

$$\text{OBS: } 3 - |x| > 0 \wedge |x| - 1 > 0$$

$$|x| < 3 \wedge |x| > 1$$

$$\rightarrow 1 < |x| < 3$$

$$\Rightarrow -3 < x < -1 \vee 1 < x < 3 \mid (\alpha)$$

DE LA INECUACIÓN:

$$\log_{64} (3-|x|)^2 < \log_{64} (|x|-1)$$

$$\rightarrow (3-|x|)^2 < |x|-1$$

$$\text{DEBUI: } |x|^2 - 7|x| + 10 < 0$$

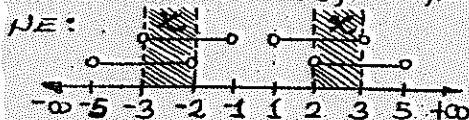
$$(|x|-2)(|x|-5) < 0$$

$$\rightarrow 2 < |x| < 5$$

DEBUI:

$$-5 < x < -2 \vee 2 < x < 5$$

INTERSECTANDO CON (α), SE OBTIENE:



$$\text{OBT: } -3 < x < -2 \vee 2 < x < 3$$

$$\text{CONJUNTO: } \text{C.S.} = (-3; -2) \cup (2; 3) = A$$

LUEGO:

$$(I) \text{ es V ; (II) es F ; (III) es F}$$

$$\therefore (I) \text{ es CORRECTO}$$

$$\text{E6 DE LA INECUACIÓN: } \overline{x > 0} \quad (\alpha)$$

$$\text{LUEGO: } 1 - \log_2^2 x < \left[\left(\frac{5}{4} \right)^2 - 2 \right] + \log_2^2 x$$

$$\text{OBT: } \text{BASE} = \frac{5}{4} > 1$$

$$\rightarrow 1 - \log_2^2 x < -4 - 2 \log_2^2 x$$

$$\sim \log_2^2 x - 4 \log_2 x - 5 < 0$$

$$\text{FACTORIZADO: } (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 5) > 0$$

$$\rightarrow \log_2 x < -1 \vee \log_2 x > 5$$

$$x < -\frac{1}{2} \vee x > 32$$

INTERSECTANDO CON (α), SE TIENE:

$$0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 32$$

$$\therefore \text{C.S.} = (0; \frac{1}{2}) \cup (32; +\infty)$$

$$\text{E7 DE } \log_3 |3-4x| > 2 \dots (I)$$

$$\text{OBT: } 3-4x \neq 0 \rightarrow \overline{x \neq \frac{3}{4}}$$

$$\text{DE (I): } |3-4x| > 9$$

$$\rightarrow \frac{3-4x < -9}{x > 3} \vee \frac{3-4x > 9}{x < -\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow \text{C.S.} = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{O TAMBIÉN: } \text{C.S.} = \mathbb{R} - \left[-\frac{3}{2}; 3 \right]$$

$$\text{E8 DE } (\log_2 |x| - 3 + x)(x+2) \leq 0$$

$$\text{OBT: } \overline{x \neq 0} \quad (\alpha)$$

LUEGO, SE ANALIZAN 2 CASOS:

$$(1) \log_2 |x| - 3 + x > 0 \wedge x+2 \leq 0$$

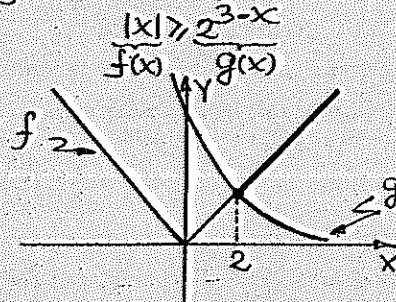
v

$$(2) \log_2 |x| - 3 + x \leq 0 \wedge x+2 > 0$$

$$\text{DE (1): } \log_2 |x| > 3-x \wedge x \leq -2$$

$$\sim |x| > 2^{3-x} \wedge x \leq -2 \quad (\beta)$$

OBT: RESOLVAMOS GRÁFICAMENTE



DEL GRÁFICO, $f(x) > g(x)$ CUANDO $x > 2$

$$\Rightarrow \text{EN } (S): x > 2 \wedge x \leq -2,$$

INTERSECTANDO: $x \in \emptyset \setminus S_1$

$$\cdot \text{DE (2)}: \log_2 |x| \leq 3 - x \wedge x > -2$$

$$\Rightarrow |x| \leq 2^{3-x} \wedge x > -2$$

$$\Delta \text{GUS: } x \leq 2 \wedge x > -2$$

(VER GRÁFICO)

INTERSECTANDO: $-2 < x \leq 2$

PERO POR (A), $x \neq 0$

$$\Rightarrow C.S. = [-2; 0) \cup (0; 2]$$

IDENTIFICANDO: $a = -2$; $b = c = 0$
y $d = 2$

$$\therefore T = ad + bc = -4$$

50) DE LA INECUACIÓN:

$$\frac{4(y+1)}{y} > 0 \wedge \frac{2y}{y+1} > 0 \wedge \left(\frac{y+1}{2y}\right)^2 > 0$$

$$(y < -1 \vee y > 0) \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

$$y < -1 \vee y > 0 \mid S_0$$

CONDICIÓN NECESARIA

LA INECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\log_2 \left[\frac{4(y+1)}{y} \right] x^2 + 2 \log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) x - 2 \log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) > 0$$

DE AQUÍ, PARA QUE SE VERIFIQUE

$$\forall x \in \mathbb{R}: \log_2 \left[\frac{4(y+1)}{y} \right] > 0 \wedge \Delta < 0$$

(1) (2)

$$\cdot \text{DE (1)}: \log_2 \left[\frac{4(y+1)}{y} \right] > 0 \rightarrow \frac{4(y+1)}{y} > 1 \quad (A)$$

$$\text{DE AQUÍ: } \frac{3y+4}{y} > 0 \rightarrow y < -\frac{4}{3} \vee y > 0 \mid S_1$$

$$\cdot \text{DE (2)}: \Delta < 0$$

$$4 \log_2^2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) + 8 \log_2 \left[\frac{4(y+1)}{y} \right] \cdot \log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) < 0$$

DIVIDIENDO POR 4 Y FACTORIZANDO:

$$\log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) \left[\log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) + 2 \log_2 \left[\frac{4(y+1)}{y} \right] \right] < 0$$

$$\rightarrow \log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) \cdot \log_2 \left[\frac{2y}{y+1} \cdot \frac{16(y+1)^2}{y^2} \right] < 0$$

$$\log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) \cdot \log_2 \left(\frac{32(y+1)}{y} \right) < 0$$

ESTO ES (+) ¿POR QUÉ?

$$\cdot \text{VEA (A)}: \frac{4(y+1)}{y} > 1 \rightarrow \frac{32(y+1)}{y} > 8$$

$$\rightarrow \log_2 \left(\frac{32(y+1)}{y} \right) > \log_2 8 = 3$$

DE LA INECUACIÓN NOS QUEDA:

$$\log_2 \left(\frac{2y}{y+1} \right) < 0 \rightarrow \frac{2y}{y+1} < 1$$

$$\rightarrow \frac{y-1}{y+1} < 0 \rightarrow -1 < y < 1 \mid S_2$$

FINALMENTE INTERSECTAMOS S_0 ,

S_1 y S_2 ; OBTENIÉNDOSE:

$$0 < y < 1 \text{ ó } y \in (-1; 0)$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a = 0 \text{ y } b = 1 \therefore a + b = 1$$

$$\textcircled{C} \text{ FACTORIZO: } P(x) = 3x(x^2 + 8x^2 + 16)$$

TCP

$$\rightarrow P(x) = 3x(x^2 + 4)^2$$

Obj: $x=0$ es la única raíz real de P (raíz simple)

Las otras 4 raíces son imaginarias, $\hookrightarrow$ la gráfica de P debe cortar al eje x en un solo punto (en $x=0$) y no tocarlo en ningún otro punto.

$\therefore$ Gráf. aprox: (A)

61) Según la gráfica, para que $f(x)$ sea de menor grado:

$x=0$ debe ser raíz simple

$x=2$ " " " DOBLE

$x=5$ " " " SIMPLE

$$\hookrightarrow f(x) = Kx(x-2)^2(x-5)$$

pero del gráfico: $f(1) = 4$

$$\rightarrow f(1) = K(1)(1)(-4) = 4 \rightarrow K = -1$$

$$\therefore f(x) = -x(x-2)^2(x-5)$$

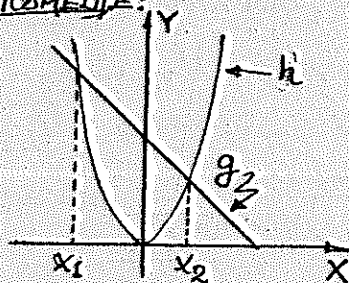
$$62) f(x) = x^6 + x - 66^2(x+2)^3$$

Calculemos las raíces de

$$x^6 + x - 66 = 0 \rightarrow x^6 = 66 - x$$

$$h(x) = g(x)$$

Gráficamente:



Obj: la ecuación $h(x) = g(x)$ es decir $x^6 + x - 66 = 0$ admite 2 raíces reales, $x_2 = 2$ y aplicando Bolzano se demuestra que $-3 < x_1 < -2$. Las otras 4 son complejas.

$$\hookrightarrow f(x) = [K(x)(x-x_1)(x-2)]^2(x+2)^3$$

$$f(x) = K(x)(x-x_1)^2(x-2)^2(x+2)^3$$

$\hookrightarrow$ aquí: $x \notin \mathbb{R}$

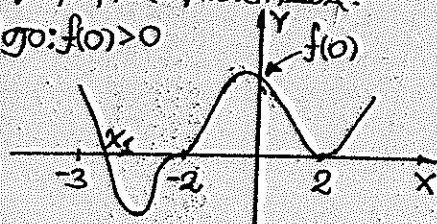
Obj: $x = x_1$ es raíz doble

$x = 2$ es raíz doble

$x = -2$ es raíz triple

Gráfica aproximada:

$$f(0) > 0$$



63) Según la gráfica, podemos asumir así:

$$P(x) = -x^{2\alpha}(x-2)^{2\beta}(x-3)^{2\theta+1}$$

$$\text{donde } 2\alpha + 2\beta + 2\theta + 1 = n$$

$$\text{Obj: } P(5) = -5^{2\alpha} \cdot 3^{2\beta} \cdot 2^{2\theta+1} = -1800$$

$$\text{de aquí: } 5^{2\alpha} \cdot 3^{2\beta} \cdot 2^{2\theta+1} = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3$$

Identificando exponentes:

$$\alpha = 1; \beta = 1; \theta = 1$$

$$\hookrightarrow P(x) = -x^2(x-2)^2(x-3)^3$$

$$\hookrightarrow \sum \text{coef.} = P(1) = -(1)(1)(-8)$$

$$\therefore \sum \text{coef.} = 8$$

- (A) LA GRÁFICA QUE PUEDE REPRESENTAR A LA FUNCIÓN POLINOMIAL $f(x) = x^3 + mx + n$; $m \neq 0$, ES LA ALTERNATIVA (E)

SIEMPRE QUE:

$$m < 0; \Delta = 0 \text{ y } n > 0$$

- (B) $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 = 0$

RESOLVAMOS LA ECUACIÓN:

3	2	-3	-12	7	6
	↓	6	9	-9	-6
	2	3	-3	-2	0
1	↓	2	5	2	
	2	5	2	0	

$$\Rightarrow (x-3)(x-1)(2x^2+5x+2) = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x-1)(2x+1)(x+2) = 0$$

DE ACUERDO AL DATO, LAS RAÍCES SON:

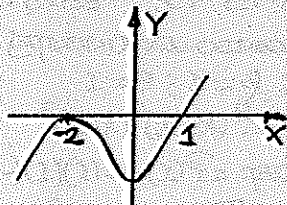
$$x_1 = -2; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = 1; x_4 = 3$$

Luego: $P(x) = (x+2)(x-1)(x+2)$

$$\text{ó } P(x) = (x-1)(x+2)^2$$

Obj: LA GRÁFICA DE P INTERSECTA AL EJE x EN $x=1$ Y ES TANGENTE EN $x=-2$, ADEMÁS QUE $P(0) = -4$, ES DECIR, $(0; -4) \in P$.

SU GRÁFICA APROX. SERÁ:



- (C) SEGÚN EL GRÁFICO, ASUMAMOS:

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)^2$$

DONDE VEMOS QUE:

$$a < b < c < 1 < d \text{ ¡IMPORTANTE!}$$

LUEGO:

$$P(1-x) = (1-x)(1-x-a)(1-x-b)(1-x-c)(1-x-d)^2$$

AHORA, RESOLVIENDO $P(1-x) = 0$, SE TIENE:

$$* 1-x-a=0 \rightarrow |x| = \frac{1-a}{2} \text{ ES } (+)$$

AQUÍ HAY 2 RAÍCES REALES UNA (+) Y OTRA (-)

$$* 1-x-b=0 \rightarrow |x| = \frac{1-b}{2} \text{ ES } (+)$$

SIMILAR AL ANTERIOR

$$* 1-x-c=0 \rightarrow |x| = \frac{1-c}{2} \text{ ES } (+)$$

IGUALMENTE AL ANTERIOR

$$* 1-x-d=0 \rightarrow |x| = \frac{1-d}{2} \text{ ES } (-)$$

AQUÍ NO HAY SOLUCIÓN.

∴ $P(1-x) = 0$ TIENE 6 RAÍCES REALES, 3 POSITIVAS Y 3 NEGATIVAS

∴ (I) ES F; (II) ES F; (III) ES V

∴ SÓLO (III) ES CORRECTO

$$(D) \cdot P(x) = x^n - nx + n - 1 = 0$$

$$\text{Obj: } P(1) = 1 - n + n - 1 \rightarrow \underline{P(1) = 0}$$

$$\text{DERIVANDO } P(x): P'(x) = nx^{n-1} - n$$

$$\text{AQUÍ: } \underline{P'(1) = 0}$$

DERIVANDO $P'(x)$:

$$P''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\text{AQUÍ: } P''(1) = n(n-1) \neq 0$$

OTO: LAS SIGUIENTES DERIVADAS
NO SE ANULAN PARA $x=1$ (COM-
PRUEBELO)

$$\Rightarrow P(1) = 0 \wedge P'(1) = 0$$

$\therefore x=1$ ES RAÍZ DE MULTIPLI-
CIDAD 2

$$(68) \text{ DE } x^3 = -3x - b \dots (I)$$

$$\text{SE TIENE QUE: } x = \omega^{1/3} - \omega^{-1/3}$$

ES RAÍZ (DATO)

ELEVANDO AL CUBO:

$$x^3 = \omega - \omega^{-1} - 3\omega^{1/3} \cdot \omega^{-1/3} (\omega^{1/3} - \omega^{-1/3})$$

$$\Rightarrow x^3 = \omega - \omega^{-1} - 3x$$

$$\text{O } x^3 = -3x + (\omega - \omega^{-1})$$

COMPARANDO CON (I):

$$\text{OBS: } \omega - \omega^{-1} = -b \therefore \omega + b = \omega^{-1}$$

(69) FACTORIZAMOS POR ASPA DOBLE
ESPECIAL:

$$\begin{array}{r} 36x^4 + 60x^3 + 37x^2 + 10x + 1 \\ \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ 6x \quad 4x \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ 5x \quad 1 \end{array} \end{array}$$

$$f(x) = (6x^2 + 6x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$$

$$= (3x+1)^2 (2x+1)^2$$

OBS: SON RAÍCES REALES DE $f(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} +x = -1/3 \text{ (RAÍZ DOBLE)} \\ +x = -1/2 \text{ (RAÍZ DOBLE)} \end{array} \right\} \text{ AMBAS } (-)S$$

$\Rightarrow$ LA GRÁFICA DE f ES TANGENTE
AL EJE x EN LOS PUNTOS $-1/3$
Y $-1/2$, ADEMÁS VEMOS QUE
 $f(0) = 1$; ES DECIR: $(0, 1) \in f$

CON ESTO:

GRÁF. APROX.

$$(70) \text{ DE } x^3 + 8x - 24 = 0$$

POR CARDANO-VIEJE:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

POR PRODUCTOS NOTABLES SE CUMPLE:

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -5(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

DE LA ECUACIÓN, POR CARDANO:

$$x_1x_2x_3 = 24; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 8$$

$$\therefore x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -5(24)(8) = -960$$

$$(71) \cdot 2x^3 - 6x^2 + 8x - 5 = 0$$

Y x_1 ES RAÍZ DE LA ECUACIÓN,

$$\Rightarrow 2x_1^3 - 6x_1^2 + 8x_1 - 5 = 0$$

$$2x_1(x_1^2 - 3x_1 + 4) = 5$$

$$\frac{1}{x_1^2 - 3x_1 + 4} = \frac{2x_1}{5}$$

EN FORMA SIMILAR PARA LAS RAÍ-
CES x_2 Y x_3 , SE TIENE:

$$\frac{1}{x_2^2 - 3x_2 + 4} = \frac{2x_2}{5}; \frac{1}{x_3^2 - 3x_3 + 4} = \frac{2x_3}{5}$$

SUMANDO LAS IGUALDADES SE TIENE:

$$F = \frac{2(x_1 + x_2 + x_3)}{5}$$

$$\text{PERO: } x_1 + x_2 + x_3 = 3 \therefore F = \frac{6}{5}$$

(72) SI a, b, c SON RAÍCES DE
 $2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$

⇨ POR CARDANO-VIETE:

$$a+b+c = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad abc = -1$$

NO PIDEEN: $F = \frac{a+b+c}{abc}$

$$\rightarrow F = \frac{-1/2}{-1} \quad \therefore F = \frac{1}{2}$$

(73) COMO a, b, c SON RAÍCES DE
 $x^3 + x + 3 = 0$

⇨ POR CARDANO-VIETE:

$$a+b+c = 0 \quad \wedge \quad abc = -3$$

PERO, POR PRODUCTO NOTABLES;

SE SABE QUE: SI $a+b+c = 0$

$$\rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

EN LO PEDIDO: $T = 3abc$

$$\therefore T = 3(-3) = -9$$

(74) EFECTUANDO EN LO PEDIDO:

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_3 x_4} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_1 x_4} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_2 x_4} = -\frac{53}{24}$$

PERO DE LA ECUACIÓN:

$$4x^4 - 28x^3 + (2a+5)x^2 + 14x - 2 = 0$$

$$+ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_3 x_4 = \frac{2a+5}{4}$$

$$+ x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{-2}{4}$$

$$\text{EN } (\alpha): \frac{\frac{2a+5}{4}}{\frac{-2}{4}} = -\frac{53}{24}$$

$$\rightarrow \frac{2a+5}{2} = \frac{53}{24} \quad \wedge \quad a = \frac{24}{x}$$

(75) DE $x^3 - 2x^2 + 2ax - b = 0$; $a > 0$

$$+ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad \dots (1)$$

$$+ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 2a \quad \dots (2)$$

$$+ x_1 x_2 x_3 = b = ?$$

LEVO (1) AL CUADRADO:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{21} + \frac{2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)}{2a} = a^2$$

DE AQUI: $a^2 - 4a - 21 = 0$

$$(a-7)(a+3) = 0 \rightarrow a = 7 \vee a = -3$$

• SI $a = 7$ y $x_2 = 2x_1$

$$\text{EN (1): } 3x_1 + x_3 = 7 \rightarrow x_3 = 7 - 3x_1$$

$$\text{• EN (2): } 2x_1^2 + x_1 x_3 + 2x_1 x_3 = 14$$

$$\rightarrow 2x_1^2 + 3x_1 x_3 = 14$$

$$\text{ó } 2x_1^2 + 3x_1(7 - 3x_1) = 14$$

DE AQUI: $x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$

$$(x_1 - 2)(x_1 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 2 \vee x_1 = 1$$

• SI $x_1 = 2 \rightarrow x_2 = 4 \wedge x_3 = 1$

• SI $x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 2 \wedge x_3 = 4$

• OBS: EN CUALQUIERA DE LOS CASOS:

$$x_1 x_2 x_3 = 8 = \frac{b}{x}$$

(76) • $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9 \dots (\alpha)$

• SI $P(m) = P(n) = P(r) = 0$

⇨ m, n y r SON RAÍCES DE $P(x)$

• LUEGO: $+m+n+r = -3 \dots (1)$

$$* mn + mr + nr = 0 \dots (2)$$

$$* mnr = 9 \dots (3)$$

NOS PIDEN:

$$P\left(\frac{m}{nr} + \frac{n}{mr} + \frac{r}{mn}\right) = P\left(\frac{m^2 + n^2 + r^2}{mnr}\right)$$

$$\cdot (1)^2: m^2 + n^2 + r^2 + 2 \frac{(mn + mr + nr)}{0} = 9$$

$$n = m^2 + n^2 + r^2 = 9$$

Lo que nos piden, es:

$$P\left(\frac{9}{9}\right) = P(1) = ?$$

$$\text{En } (x): P(1) = 1 + 3 - 9 = -5$$

$$(77) \text{ DE } 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$n = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{9}{2}$$

$$\text{Por dato: } \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{6}$$

$$\text{PPP: } \frac{x_1 + x_2 + x_3}{1 + 2 + 6} = \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{6}$$

$$n = \frac{-9/2}{9} = x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{6}$$

$$\text{De aquí: } x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -1; x_3 = -3$$

con esto:

$$(I) \text{ es F; (II) es F; (III) es V}$$

$$\therefore \text{Solo III es correcto}$$

$$(78) \cdot P(x) \text{ es de } 5^\circ \text{ grado; donde:}$$

$$P(1) = 3; P(2) = 5; P(3) = 7;$$

$$P(4) = 9 \text{ y } P(5) = 11$$

$$\text{Como } Q(x) = P(x) - 2x - 1 \dots (I)$$

$$\Phi Q(x) \text{ también es de grado 5}$$

En (I), vemos que:

$$Q(1) = \frac{P(1)}{3} - 2 - 1 \rightarrow Q(1) = 0$$

En forma similar, se tiene:

$$Q(2) = Q(3) = Q(4) = Q(5) = 0$$

$$\therefore 1; 2; 3; 4 \text{ y } 5 \text{ son}$$

$$\text{raíces de } Q(x) = 0$$

$$(79) \text{ Sean } a, b, c, d \text{ las raíces de } x^4 - 12x - 5 = 0$$

$$\text{Por dato: } a + b = 2$$

$$\text{Nos piden: } \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{cd}{cd} = ?$$

Por Cardano-Viete:

$$a + b + c + d = 0 \rightarrow cd = -2$$

$$* ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$$

$$ab - 2(a + b) + cd = 0$$

$$\text{De aquí: } ab + cd = 4 \dots (1)$$

$$+ abcd + abd + acd + bcd = 12$$

$$ab(-2) + cd(2) = 12$$

$$\text{De aquí: } -ab + cd = 6 \dots (2)$$

$$\cdot (1) + (2): cd = 5$$

$$\text{En lo pedido: } \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{-2}{5} = -0,4$$

$$(80) \cdot 2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$$

Factoricemos por divisores binomios:

$$x = -\frac{1}{2} \begin{array}{|ccc|} \hline 2 & -1 & -7 & -3 \\ \hline \downarrow & -1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & -2 & -6 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$(x + \frac{1}{2})(2x^2 - 2x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$+ 2x+1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} = x_0$$

$$+ x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

VEAMOS QUE: $x_0 < 0$ y $x_2 < 0$

$$\therefore x_0 + x_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

(81) DATOS: $P(x) = ax^2 + bx + 1$

$$P(1) = a + b + 1 = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 1 \dots (1)$$

ADemás:

$$Q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + 1) + (3x+1)$$

$$\text{Aquí: } Q(2) = 4a + 2b + 1 + 6 + 1 = 7$$

$$\Rightarrow 2a + b = -\frac{1}{2} \dots (2)$$

RESOLVIENDO (1) y (2):

$$a = -\frac{3}{2} \wedge b = \frac{5}{2}$$

JUEGO, $Q(x) = 0$, es:

$$(x-1)\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right) + 3x + 1 = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } 3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x(3x^2 - 8x - 3) = 0$$

$$x(3x+1)(x-3) = 0$$

$$\text{es: } x_1 = 0; x_2 = -\frac{1}{3}; x_3 = 3$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{82}{9}$$

(82) RESOLVAMOS $P(x) = 0$

$$x = -1 \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & -3 & -6 & 10 & 21 & 9 \\ \hline \downarrow & -1 & 4 & 2 & -12 & -9 \\ \hline \end{array}$$

$$x = -1 \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & -4 & -2 & 12 & 9 & 0 \\ \hline \downarrow & -1 & 5 & -3 & -9 & \\ \hline \end{array}$$

$$x = -1 \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & -5 & 3 & 9 & 0 \\ \hline \downarrow & -1 & 6 & -9 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 1 & -6 & 9 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow (x+1)^3(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$(x+1)^3(x-3)^2 = 0$$

+ $x = -1$, es RAÍZ DE MULTIPLICIDAD 3

+ $x = 3$ es RAÍZ DE MULTIPLICIDAD 2.

$\therefore$ UNA RAÍZ DOBLE
Y OTRA TRIPLE

(83) DE $x^3 + px^2 + 23x + 15 = 0$

$$+ x_1 + x_2 + x_3 = -p = -9 \text{ (dato)}$$

$$\Rightarrow p = 9$$

LA ECUACIÓN ES:

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$$

$$x = -1 \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 9 & 23 & 15 \\ \hline \downarrow & -1 & -8 & -15 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2 + 8x + 15) = 0$$

$$(x+1)(x+3)(x+5) = 0$$

DE AQUÍ:

$$x_1 = -1; x_2 = -3; x_3 = -5$$

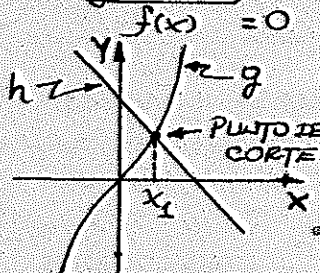
MEJOR RAÍZ

(84) ANALICEMOS GRÁFICAMENTE.

$$\text{DE } f(x) = x^5 + x - 1 = 0$$

$$\leadsto \frac{x^5}{g(x)} = \frac{-x+1}{h(x)}$$

GRAFICAMOS g y h . EL # DE PUNTOS DE CORTE DE AMBAS GRÁFICAS NOS DETERMINA EL # DE RAÍCES REALES QUE TIENE LA ECUACIÓN $g(x) - h(x) = 0$



OBS: x_1 HACE QUE $g(x_1) = h(x_1)$

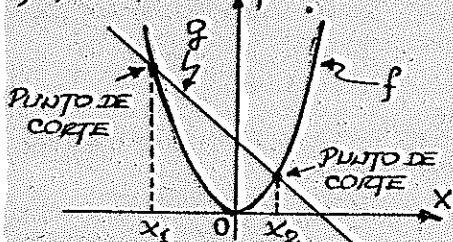
$\therefore$ SÓLO UNA RAÍZ REAL

(85) SIMILAR A LA RESOLUCIÓN ANTERIOR.

RESOLVAMOS $p(x) = 0$

$$\leadsto \frac{x^6 - 66 - x}{f(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

GRAFICANDO:



OBS: x_1 y x_2 HACEN QUE $f(x_1) = g(x_1)$ y $f(x_2) = g(x_2)$. POR TANTO LA ECUACIÓN $p(x) = 0$ ADMITE DOS RAÍ-

CES REALES; DONDE: $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ (NO SON DEL MISMO SIGNO) $\diamond$ (I) ES F.

* POR LO ANTERIOR $\diamond$ (II) ES V

$$* p(x) = x^6 + x - 66$$

$$\text{OBS: } p(-3) = 729 - 3 - 66 = 660 > 0$$

$$p(-2) = 64 - 2 - 66 = -4 < 0$$

$$\diamond p(-3) \cdot p(-2) < 0$$

LUEGO, POR EL TEOREMA DE BOLLEND

EXISTE $x_1 \in (-3; -2)$ y SE OBSERVA QUE $x_2 > 0$ $\diamond$ (III) ES V

$\therefore$ (II) y (III) SON CORRECTOS

(86) RESOLVAMOS $p(x) = 0$

FACTORICEMOS ASÍ:

$$3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$$

$$\begin{array}{l} 3x^2 \uparrow \quad \boxed{-5x} \uparrow \quad -2 \text{ * S.D.T.: } -x^2 \\ x^2 \quad \quad \quad x \quad \quad \quad 2 \text{ * S.T.: } 4x^2 \\ \hline \text{FALTA: } -5x^2 \end{array}$$

$$\leadsto (3x^2 - 5x + 2)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$\begin{array}{l} 3x \quad \quad 1 \\ x \quad \quad -2 \end{array}$$

$$\rightarrow (3x+1)(x-2)(x^2+x+2) = 0$$

DE AQUÍ:

$$+x = -\frac{1}{3}; \quad x = 2; \quad x^2 + x + 2 = 0, \quad \Delta < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

$\therefore$ Σ DE RAÍCES RACIONALES: $\frac{5}{3}$

$$(87) 4x^5 - 16x^4 - 31x^3 + 145x^2 - 66x - 12 = 0$$

FACTORICEMOS DICHO POLINOMIO POR DIVISORES BINOMIOS; ASÍ:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 x=2 & 4 & -16 & -31 & 145 & -66 & -72 \\
 & \downarrow & 8 & -16 & -24 & 102 & 72 \\
 x=4 & 4 & -8 & -47 & 51 & 36 & 0 \\
 & \downarrow & 16 & 32 & -60 & -36 & \\
 x=-3 & 4 & 8 & -15 & -9 & 0 & \\
 & \downarrow & -12 & 12 & 9 & & \\
 & 4 & -4 & -3 & 0 & &
 \end{array}$$

$$(x-2)(x-4)(x+3)(4x^2-4x-3)=0$$

$$\begin{array}{c}
 2x \quad 1 \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 2x \quad -3
 \end{array}$$

$$(x-2)(x-4)(x+3)(2x+1)(2x-3)=0$$

DE AQUÍ: DOS RAÍCES SON NEGATIVAS

$$\text{VDS, } x_1 = -3; x_2 = -1/2$$

88 RECUERDE

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}; |z| = |\bar{z}|$$

CALCULEMOS POR PARTES:

$$\begin{aligned}
 |zu + wv|^2 &= (zu + wv)(\overline{zu + wv}) \\
 &= (zu + wv)(\bar{z}\bar{u} + \bar{w}\bar{v}) \\
 &= zu \cdot \bar{z}\bar{u} + zu \cdot \bar{w}\bar{v} \\
 &\quad + wv \cdot \bar{z}\bar{u} + wv \cdot \bar{w}\bar{v} \\
 &= |zu|^2 + zu \cdot \bar{w}\bar{v} \\
 &\quad + wv \cdot \bar{z}\bar{u} + |wv|^2
 \end{aligned}$$

ADemás:

$$\begin{aligned}
 |z\bar{v} - w\bar{u}|^2 &= (z\bar{v} - w\bar{u})(\overline{z\bar{v} - w\bar{u}}) \\
 &= z\bar{v} \cdot \bar{z}\bar{v} - z\bar{v} \cdot \bar{w}\bar{u} \\
 &\quad - w\bar{u} \cdot \bar{z}\bar{v} + w\bar{u} \cdot \bar{w}\bar{u} \\
 &= |z\bar{v}|^2 - z\bar{v} \cdot \bar{w}\bar{u} \\
 &\quad - w\bar{u} \cdot \bar{z}\bar{v} + |w\bar{u}|^2
 \end{aligned}$$

SUMANDO LAS IGUALDADES OBTENIDAS:

$$|zu + wv| + |z\bar{v} - w\bar{u}| = |zu|^2$$

$$|wv|^2 + |z\bar{v}|^2 + |w\bar{u}|^2$$

$$E = |z|^2|u|^2 + |w|^2|v|^2 + |z|^2|\bar{v}|^2 + |w|^2|\bar{u}|^2$$

$$E = |z|^2|u|^2 + |w|^2|v|^2 + |z|^2|v|^2 + |w|^2|u|^2$$

Por dato: $|z| = |w| = |v| = |u| = 2$

$$E = 16 + 16 + 16 + 16 = 64$$

89 USANDO LOS DATOS:

$$(1^\circ) (1+yi) + (u+vi) = 2+5i$$

$$(2^\circ) (1+u) + (y+v)i = 2+5i$$

DE AQUÍ: $1+u = 2 \dots (\alpha)$

$$y+v = 5 \dots (\beta)$$

$$(2^\circ) (1+yi)(u+vi) = -1+13i$$

$$(3^\circ) (u-yv) + (uy+vi)i = -1+13i$$

DE AQUÍ: $u-yv = -1 \dots (\gamma)$

$$uy+v = 13 \dots (\delta)$$

$$(\phi) - (\beta): y(u-1) = 8$$

$$y(2-2) = 8$$

OTO: $1 < 2 < 9$

$$y \{y, u, v\} \in \mathbb{Z}^+$$

DE AQUÍ, LOS ÚNICOS CASOS POSIBLES QUE CUMPLEN TODAS LAS CONDICIONES SON:

$$y(u-1) = 8$$

PERO COMO u ES MÁXIMO, ENTONCES, TOMAMOS:

$$y(u-1) = 2 \times 4 \Rightarrow u-1 = 4 \Rightarrow u = 5$$

90 ESCRIBIENDO EN FORMA BINÓMICA:

$$z = \frac{(1+i)^2 \cdot (2+2i)^2 \cdot (3+3i)^2}{(0+6i)^2}$$

$$= \frac{(1+i)^2 \cdot 4(1+i)^2 \cdot 9(1+i)^2}{-36}$$

PERO, SE SABE QUE: $(1+i)^2 = 2i$

$$\Rightarrow z = -(2i)(2i)(2i) = -8i^3$$

PERO: $i^3 = -i \therefore z = 8i$

$$\rightarrow r^2 - 4r - 1 > 0 \wedge r^2 - r - 1 < 0$$

APLICANDO FÓRMULA PARA UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA:

$$\left(r < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee r > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\wedge \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < r < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

INTERSECTANDO SE TIENE:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \text{Máx. } r = \text{Máx. } |z| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

01) SEA $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

EN EL DATO:

$$\left| r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \right| = 1$$

$$\left| \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \left(r - \frac{1}{r} \right) i \sin \theta \right| = 1$$

$$\Rightarrow \left(r + \frac{1}{r} \right)^2 \cos^2 \theta + \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 \sin^2 \theta = 1^2$$

$$\left(r + \frac{1}{r} \right)^2 \cos^2 \theta + \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 - \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 \cos^2 \theta = 1$$

APLÍQUESE LEY DE MOIVRE

$$\cos^2 \theta \left(4r + \frac{1}{r} \right) + \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 = 1$$

DE AQUÍ: $\cos^2 \theta = \frac{1 - \left(r - \frac{1}{r} \right)^2}{4}$

PERO, SE SABE QUE: $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1 - \left(r - \frac{1}{r} \right)^2}{4} \leq 1$$

$$\rightarrow 0 \leq 1 - \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 \leq 4$$

$$-3 \leq \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 \leq 1$$

$$\text{ó } 0 \leq \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 \leq 1$$

DE AQUÍ: $-1 \leq r - \frac{1}{r} \wedge r - \frac{1}{r} \leq 1$

02) SEA $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$

Obs: SI $\bar{z} \in \mathbb{IC} \Rightarrow a < 0 \wedge -b > 0$

LUEGO: $-iz = -i(a+bi) = b - ai$

AQUÍ: $b < 0 \wedge -a > 0 \Rightarrow -iz \in \mathbb{IC}$
 $\cap \Rightarrow (I) \text{ ES V}$

(*) SEA $z = a+bi$, SI $z \in \mathbb{IC}$

$$\Rightarrow a < 0 \wedge b < 0$$

LUEGO:

$$(1+i)z = (1+i)(a+bi)$$

$$= (a-b) + (a+b)i$$

Obs: NO SE SABE EL SIGNO DE $-a+b \Rightarrow$ NO SE PUEDE DETERMINAR A QUE CUADRANTE PERTENECE $(1+i)z \Rightarrow (III) \text{ ES F}$

(**) SEA $z = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1-i}{1-i}$

$$z = \frac{1+i}{2} + \frac{a-i}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{1+a}{2}$$

LUEGO, SI $\frac{1+a}{2} = 0 \rightarrow a = -1$
 $\Rightarrow (III) \text{ ES V}$

$\therefore (I) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$

03) EN z :

$$z = \frac{1}{2+bi} \cdot \frac{2-bi}{2-bi} + \frac{1}{b+ai} \cdot \frac{b-ai}{b-ai}$$

$$\rightarrow z = \frac{2-bi}{2^2+b^2} + \frac{b-ai}{b^2+a^2}$$

$$\rightarrow z = \frac{2+b}{2^2+b^2} \left[\frac{2-bi}{2+b} \right] i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

(DATO)

DE AQUÍ:

$$\frac{2+b}{2^2+b^2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2^2+b^2 = 2(2+b)$$

EN LO PEDIDO:

$$F = z^2 - 2z + 1 + b^2 - 2b + 1$$

$$= (2+b)^2 - 2(2+b) + 2 \therefore F = 2$$

04) RECUERDE

SI EL NÚMERO $\frac{2+bi}{c+di}$ ES IMAGI-

NARIO PURO $\Rightarrow ac+bd=0$

EN EL PROBLEMA:

$$(m)(3)+(5)(-n)=0 \Rightarrow 3m=5n$$

05) (*) DE $z^{-1} = -z \rightarrow \frac{1}{z} = -z$

$$\rightarrow z^2 = -1 \rightarrow z = \pm i$$

$\Rightarrow$ (I) ES V

(**) DE $z^2 = \bar{z}$, UN z NO NULO QUE
LO VERIFICA ES $z = 1+0i$

$\Rightarrow$ (III) ES V

(***) DE $z^2 = -z$, UN z NO NULO
QUE LO VERIFICA ES $z = -1+0i$

$\Rightarrow$ (III) ES V

(***) SEA $z = a+bi$ y $w = c+di$

$$\text{OBS: } z\bar{w} = (a+bi)(c-di)$$

$$= (ac+bd) + (bc-ad)i$$

$$\text{Re}(z\bar{w})$$

$$\cdot \bar{z}w = (a-bi)(c+di)$$

$$= (ac+bd) + (ad-bc)i$$

$$\text{Re}(\bar{z}w)$$

$$\text{OBS: } \text{Re}(z\bar{w}) = \text{Re}(\bar{z}w) \Rightarrow \text{(IV) ES V}$$

$$\therefore \text{(I), (II), (III), (IV) SON CORRECTOS}$$

06) SI $z = a+bi$ y $\text{Arg}(z) \in \text{III}^o$

$$\Rightarrow a < 0 \text{ y } b < 0$$

EN LA IGUALDAD DATO:

$$(2+bi)(2-bi) + 2(2-bi) = 12+4i$$

$$2^2+b^2 + 2(2-bi) = 12+4i$$

$$\text{DE AQUÍ: } 2^2+b^2+2(2-bi) = 12+4i \quad (*)$$

$$4-2b=4 \rightarrow b=-2$$

$$\cdot \text{EN } (*): 2^2+4+2(2-bi) = 12$$

$$\rightarrow 2^2+2(2-bi) = 12 \rightarrow (2+4)(2-2i) = 0$$

$$\text{OBS: } a = -4 \text{ y } b = 2$$

$$\text{LUEGO: } z = -4-2i$$

$$\therefore |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

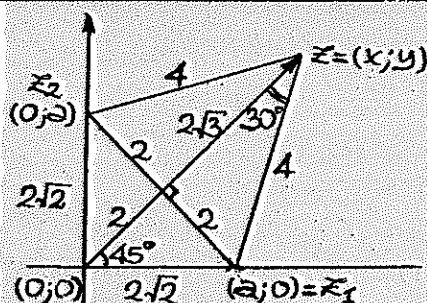
07) VER GRÁFICO EN LA PÁG. SIGTE.

$$\text{OBS: } z = (2+2\sqrt{3}) \left(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ \right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = 2(1+\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$



$$\rightarrow z = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(1+i)$$

ADemás:

$$z_1 = 2\sqrt{2} \text{ y } z_2 = 2\sqrt{2}i$$

Luego:

$$z_1 z_2 z = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} i \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})(1+i)$$

$$\therefore z_1 z_2 z = 8(\sqrt{6} + \sqrt{2})(-1+i)$$

$$\textcircled{08} \quad a_1 = 1+i$$

$$a_2 = (1+i)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a_3 = (1+i)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vdots$$

DE AQUÍ:

$$* a_1 - a_2 = (1+i) - (1+i)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 = (1+i)\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| = |1+i| \left| -\frac{i}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| = 1$$

$$* a_2 - a_3 = (1+i)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow |a_2 - a_3| = |1+i| \left| 1 + \frac{i}{\sqrt{2}} \right| \left| -\frac{i}{\sqrt{3}} \right|$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow |a_2 - a_3| = 1$$

Y ASÍ SUCESIVAMENTE PARA CADA CASO SE OBTIENE LO MISMO (VERIFIQUELO).

EN LO PEDIDO SE TENDRÁ:

$$\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{(n-1) \text{ SUMANDOS}} = n-1$$

$$\textcircled{09} \quad z = a+bi$$

$$\text{DADO: } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{\text{Im}(z^4)}{3} \dots (*)$$

$$\text{OBS: } b = 2a \Rightarrow z = a(1+2i)$$

$$\text{ENDE: } z^4 = a^4(1+2i)^4$$

$$z^4 = a^4(-7-24i)$$

$$\text{OBS: } \text{Im}(z^4) = -24a^4$$

$$\text{EN (*)}: \frac{a}{1} = \frac{-24a^4}{3} \rightarrow a^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{10} \text{ según condiciones:}$$

$$(1-a)\sqrt{4i} + a(1+i) = r \cos \frac{\pi}{4}$$

$$(1-a)\sqrt{4i} + a + ai = \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}ri$$

$$(1-a)\sqrt{4i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - a\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - a\right)i$$

ELEVAMOS AL CUADRADO:

$$(1-a)^2 + (1-a)^2 i = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r - a \right)^2 i$$

DE AQUÍ: $*(1-a)^2 = 0 \rightarrow a = 1$

y $*(1-a)^2 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r - a \right)^2$

$\hookrightarrow 0 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r - 1 \right)^2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} r = 1$

$\rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{2}} \therefore r = |z| = \frac{\sqrt{2}}{1}$

(*) $z = 1 + \cos 74^\circ + i \sin 74^\circ$

$= 2 \cos^2 37^\circ + i 2 \sin 37^\circ \cos 37^\circ$

$= \frac{2 \cos 37^\circ}{|z|} (\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ)$

OFICIALE: $|z| = 2 \cos 37^\circ = \frac{4}{5}$

$\hookrightarrow |z| = \frac{8}{5} \Rightarrow$ (I) ES F

(**) $z = 1 + \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$

$= 2 \cos^2 10^\circ + i 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ$

$= 2 \cos 10^\circ (\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$

OF: $\text{Arg}(z) = 10^\circ \Rightarrow$ (II) ES F

(***) $|z| = |2i| |4i| |2i| |3i|$

$= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

$\hookrightarrow |z| = 20 \Rightarrow$ (III) ES V

$\therefore$ Sólo (III) ES CORRECTA

$\hookrightarrow z = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$

$\rightarrow z = -1 + \sqrt{3} i$

Luego, si $w = a + bi$

En la condición:

$2 = \sqrt{(-1-a)^2 + (\sqrt{3}+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

(1) (2) (3)

DE (1) y (2): $a^2 + b^2 = 4 \dots (1)$

DE (2) y (3): $a - \sqrt{3}b = 2$

$\rightarrow a = 2 + \sqrt{3}b \dots (2)$

(2) en (1): $(2 + \sqrt{3}b)^2 + b^2 = 4$

$\hookrightarrow 4 + 4\sqrt{3}b + 3b^2 + b^2 = 4$

$4b(b + \sqrt{3}) = 0$

DE AQUÍ: $b = 0$ v $b = -\sqrt{3}$

En (2): $a = 2$ v $a = 1$

Los complejos son:

$w = 2$ y $w = -1 - \sqrt{3}i$

(13) Los puros: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = ?$

OF: $|z_1| = 2$

y como: $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\hookrightarrow |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

DE AQUÍ: $|z_2| = 1$

$\therefore \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{1} = 2$

(12) $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right); |z| = 2$

(14) Sea $z = a + bi$

Si $\arg(z) \in [\pi; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow a, b \in \mathbb{R}_0^-$

En el dato: $z\bar{z} + 2\bar{z} = 12 + 4i$

$$\rightarrow (a+bi)(a-bi) + 2(a-bi) = 12 + 4i$$

$$\rightarrow (a^2 + b^2 + 2a) - 2bi = 12 + 4i$$

$$\text{Obs: } a - 2b = 4 \rightarrow b = -2$$

$$a^2 + 4 + 2a = 12$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a+4)(a-2) = 0$$

$$\text{Obs: } a = -4 \vee a = 2 \quad (a < 0)$$

De Δ que: $z = -4 + 2i$

$$\therefore |z| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

15) Sea $z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

En el dato: $|z|^2 = 3 \operatorname{Re}(z)$

$$\text{De } \Delta \text{ que: } a^2 + b^2 = 3a$$

Los pide:

$$\left| z - \frac{3}{2} \right| = \left| a + bi - \frac{3}{2} \right| = \left| \left(a - \frac{3}{2} \right) + bi \right|$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 3a + \frac{9}{4} + b^2}$$

$$= \sqrt{3a - 3a + \frac{9}{4}}$$

$$\therefore \left| z - \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

16) Sea $w = 1 + i^{\frac{\pi}{8}} = 1 + \operatorname{cis} \frac{\pi}{8}$

$$\rightarrow w = \left[1 \cos \frac{\pi}{8} \right] + i \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} \right]$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{16} + i \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{16} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{16} \right)$$

$$\text{Obs: } |w| = 2 \cos \frac{\pi}{16}$$

$$\text{Pero: } |z| = |w|^2 \text{ ó } |z| = |w|^2$$

$$\therefore |z| = 4 \cos^2 \frac{\pi}{16}$$

17) Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$; $z_0 = (a, a)$

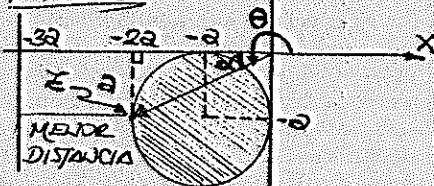
Sea a, b en el dato:

$$|(x, y) + (a, a)| \leq a; \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$|(x+a, y+a)| \leq a$$

$$\Rightarrow (x+a)^2 + (y+a)^2 \leq a^2$$

Gráficoando:



Obs: El argumento de z buscado

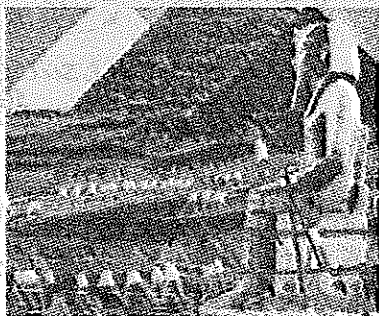
$$\theta = 180^\circ + \alpha$$

Cálculo de α (Triángulo Notable):



$$\therefore \theta = 180^\circ + \frac{53^\circ}{2} = \left(\frac{413^\circ}{2} \right)$$

EL ÁLGEBRA



Parte de la matemática que tiene por objeto de estudio la cantidad considerada de la forma más general posible.

Etimológicamente, proviene del árabe (también nombrado por los árabes Amucabala) $\bar{A}w$ —(yeber) (al - dejaber), con el significado de reducción, operación de cirugía por la cual se reducen los huesos luxados o fraccionados (álgebrista era el médico reparador de huesos).

Históricamente, el álgebra era la ciencia de las reducciones y las comparaciones; por reflejo en las matemáticas el álgebra es el dominio relativo a la resolución de las ecuaciones polinómicas. Como consecuencia, el álgebra cambió de rumbo y amplió su dominio a todas las teorías que se habían inventado alrededor del tema inicial, incorporando las teorías de los grupos, anillos, cuerpos y sus extensiones, espacios vectoriales (álgebra lineal), y parte de la geometría, la relacionada con los polinomios de segundo grado de dos variables, es decir las cónicas (elipse, parábola, hipérbola, círculo), ahora incluidas en el álgebra bilineal.

El álgebra se fundió con éxito con otras ramas de la matemáticas como la lógica (álgebra de Boole), el análisis y la topología (álgebra topológica):

ÁLGEBRA

QUINTO SEMINARIO TALLER DE ÁLGEBRA

PRE-UNI 2005-II

CONTIENE:

- **NÚMEROS COMPLEJOS**
- **MATRICES Y DETERMINANTES**
- **SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES**



LIMA - PERÚ

5^{to} SEMINARIO - TALLER

ÁLGEBRA

CICLO PRE-UNI 2005-II

01. Simplifique el número complejo

$$z = \frac{(6;8)^4}{(4-3i)^4} (1; \sqrt{3})^{27} + (1; \sqrt{3})^{30} + (1; -\sqrt{3})^{30}$$

- A) $2^{32}(1+i)$ B) $2^{31}(1-i)$
C) $2^{32}(1-i)$ D) 2^{31} E) 0

02. Determine:

$$M = 4 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{i}}{\sqrt{2} - \sqrt{i}} \right) - \frac{(\sqrt{3} + i)^4}{(1 + \sqrt{3}i)^2}$$

- A) $4+i$ B) $2i$ C) $1-i$
D) 1 E) $8i$

03. Determine el valor de "a" de manera que se cumpla $2^a = e^{\ln 8}$

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

04. Determine el valor de $\bar{z}$, si se cumple:

$$(\bar{z} - 1)^4 = (\bar{z}^2 - 2i\bar{z} - 1)^2$$

- A) $\frac{1-i e^{\frac{\pi}{2}}}{1-e^{\frac{\pi}{2}}}$ B) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+i e^{\frac{\pi}{2}}}$ C) $3e^{\frac{\pi}{2}}$
D) $1-e^{\frac{\pi}{2}}$ E) $1+2e^{\frac{\pi}{2}}$

05. Sea z en C tal que :

$$z = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1), \text{ determine el valor } \operatorname{Re}(z^{12})$$

- A) 2^{12} B) -2^{16} C) 2^{18}
D) -2^{18} E) 2^{15}

06. Al resolver: $x^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. La raíz principal está en el 2º cuadrante
II. Una de sus raíces posee argumento 285°
III. Sus raíces están ubicadas en el 1º, 3º y 4º cuadrante.
A) solo I B) solo III C) I y II
D) solo II E) II y III

07. Simplifique: $\frac{(1+i)^{51}(\sqrt{3}-i)^{28}}{(-1+i)^{29}(-1-\sqrt{3}i)^{38}}$

- A) $1 + \sqrt{3}i$ B) $\sqrt{3} - i$ C) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$
D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $\sqrt{3} + i$

08. Determine la siguiente suma compleja:

$$\left(\frac{1+3i}{i-3} \right)^2 + \left(\frac{3+5i}{3i-5} \right)^4 + \left(\frac{5+7i}{5i-7} \right)^6 + \dots$$

"2n" factores.

- A) $1 + 2^n$ B) $2i^n$ C) 0
D) -1 E) $4n + i$

09. Determine x, si el complejo:

$$z = (1-i)^3 [\cos(x+180^\circ) + i \sin(x+180^\circ)]^{1/2}, 0 \leq x < 360^\circ \text{ es imaginario puro; indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:}$$

- I. $x \in \phi$
II. $x \in (0^\circ; 90^\circ)$
III. $x \in (240^\circ; 270^\circ)$
A) I y II B) I y III C) II y III
D) solo II E) solo III

10. Dados los siguientes enunciados, indique cuál(es) son correctos.

- I. Si $z = (-2 + 2\sqrt{3}i)^6 \Rightarrow z = 2^{12}$
II. Si $z = 4e^{i\pi/3} \Rightarrow |e^{iz}| = e^{-4}$
III. $|z+1| < 1 \Leftrightarrow |\bar{z}+1| < 1, \forall z \in C$
A) solo I B) solo II C) I y III
D) III y II E) I, II y III

11. Si c es una raíz compleja de $z^5 - 1 = 0$

$$y \quad w = \frac{1}{1-c} - \frac{1}{1+c^3} + \frac{c^2}{1-c^4}$$

determine: $\text{Re}(w)$

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 4

12. Al ubicar las raíces de la ecuación $x^{50} - i = 1$, en el plano complejo, determine cuántas de estas se encuentran en el tercer cuadrante.

- A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

13. Determine una de las raíces cúbicas del número complejo $z = i$.

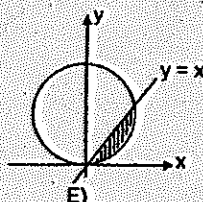
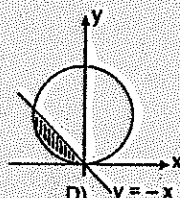
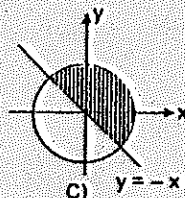
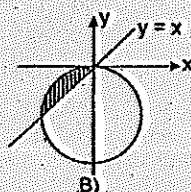
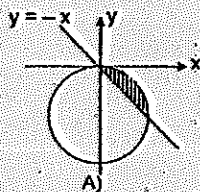
- A) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
C) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ E) -1

14. Sea $z = 1 + i$ y con respecto a las raíces de $\sqrt[9]{z}$ se proponen los siguientes enunciados:

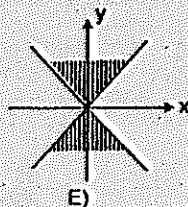
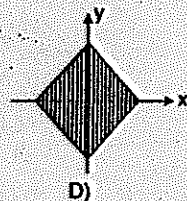
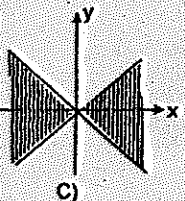
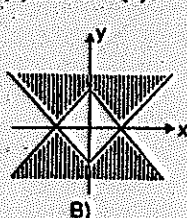
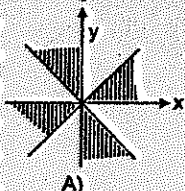
- I. En el 1er cuadrante están ubicadas dos de tales raíces.
 - II. En el 2do cuadrante están ubicadas tres de tales raíces.
 - III. En el 3er cuadrante están ubicadas dos de tales raíces.
- Indique cuál(es) son correctos.
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

15. La figura que mejor representa la gráfica del conjunto

$$A = \{Z \in \mathbb{C} / 1 < \text{Im}(1/z) \leq \text{Re}(1/z)\} \text{ es:}$$

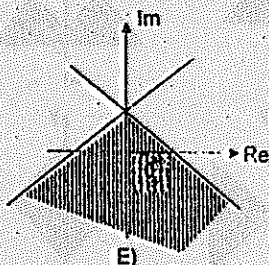
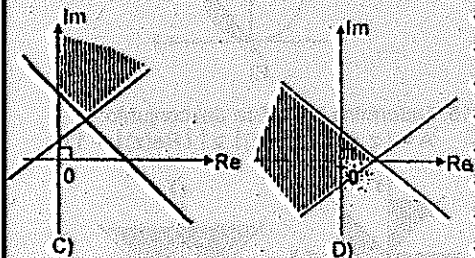
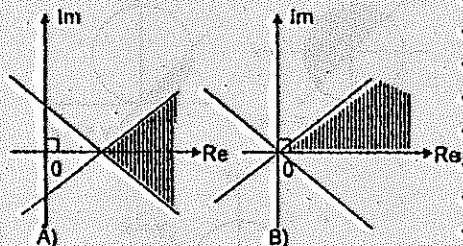


16. Determine la gráfica del conjunto:
 $A = \{z \in \mathbb{C} / |\text{Im}(z)| \geq |\text{Re}(z) - 1|\}$



- 17.Cuál de las gráficas representa mejor al conjunto:

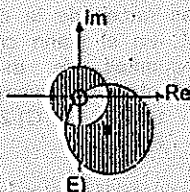
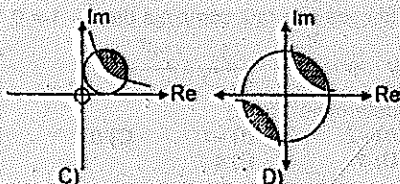
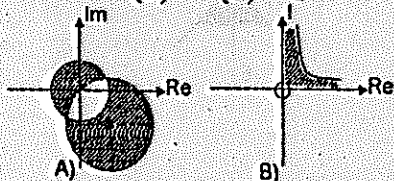
$$A = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re}(z)| + \operatorname{Re}(\bar{z}) - |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$$



18. Indique la región que le corresponde al conjunto:

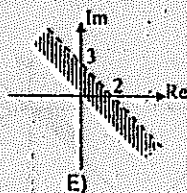
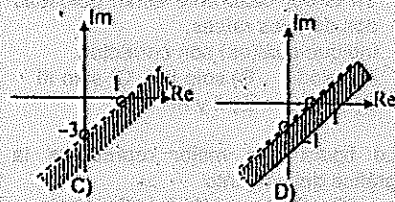
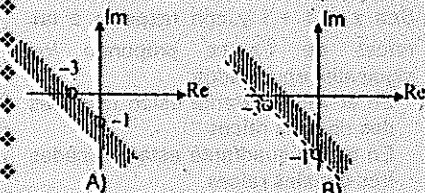
$$M = \{z \in \mathbb{C} / (|z| \leq 1 - \operatorname{Im}(\operatorname{Re}(z)) \leq 1) \Delta$$

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) + \operatorname{Im}(\frac{1}{z})) \geq \frac{1}{2})\}$$



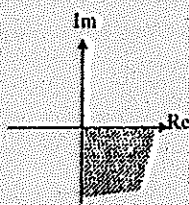
19. Determine la región de los números complejos "z" definidos por el conjunto: (z^* opuesto de z).

$$A = \{\bar{z} + 2iz^* / \operatorname{Re}(1+z) + \operatorname{Im}(\bar{z}-i) < 1\}$$

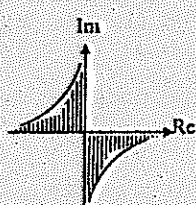


20. Si A es un conjunto definido por

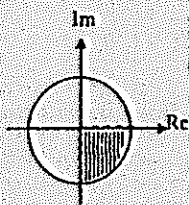
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(\bar{z}^2) \leq 2 \wedge \left| \frac{z-2}{z+2} \right| \leq 1 \wedge \frac{3\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) < 2\pi \right\}$$



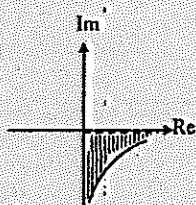
A)



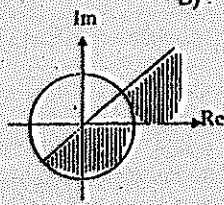
B)



C)



D)



E)

21. Determine el número de elementos de E que tengan parte real e imaginaria

$$\text{entera, } E = \{ z / |z| \leq 4, |e^{k^2}| \leq 1 \}$$

- A) 32 B) 33 C) 34
D) 35 E) 36

22. Determine una de las raíces de la ecuación:

$$z^2 + (2+i)z - (13-13i) = 0$$

- A) $3+5i$ B) $1+2i$ C) $3-2i$
D) $1+i$ E) $2+3i$

23. Resuelva la ecuación:

$$3x^3 - (7-5i)x^2 + (3-8i)x + i + 3i = 0,$$

si se sabe que una de sus raíces es real. Indique una de las raíces complejas no reales.

- A) $-1-i$ B) $1+i$ C) $\frac{2i-1}{3}$
D) $\frac{1-2i}{3}$ E) $2-3i$

24. Dada la matriz A, definida por:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 4} \text{ tal que}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i-j; & \text{si } i \neq j \\ i+j; & \text{si } i = j \end{cases}$$

Determine la suma de todos los elementos de A.

- A) 6 B) 12 C) 0
D) 8 E) 4

25. Dados los siguientes enunciados:

I. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

II. Si A y B son matrices antisimétricas, entonces la matriz $AB - BA$ es antisimétrica.

III. Dada las matrices A y B, si la matriz transpuesta del producto AB es una matriz columna, entonces A es una matriz fila.

Cuáles son correctas.

- A) solo I B) I y II C) II y III
D) solo II E) I, II y III

26. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 3 & a \\ b & x & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz

simétrica, determine la matriz

$$B = aA + bA + xA$$

- A) 3A B) 4A C) 5A
D) 6A E) 7A

27a Se define $P(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{Halle}$$

$P(A,B)$, e indique la suma de los elementos de la diagonal de P .

- A) -33 B) -81 C) 33
D) 81 E) 13

28. Se define las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} x-2y & y-z \\ 2x+2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{2 \times 2} = \begin{cases} b_{ij} = i-j, & i=j \\ b_{ij} = i+j, & i \neq j \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $A + B = C$, entonces determine

$$T = x + y + z$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

29. Se define la matriz A mediante

$$A = (a_{ij})_{2 \times 3}, \quad a_{ij} = \begin{cases} i-j, & i < j \\ i+j, & i \geq j \end{cases} \quad \text{y la}$$

matriz B como : $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si X es

una matriz que satisface la ecuación : $(2B - AA^t)^t - 2X = (X + B)^t$, determine $\text{tr}(X)$.

- A) $\frac{32}{3}$ B) $\frac{11}{3}$ C) $-\frac{23}{3}$
D) $-\frac{41}{3}$ E) $-\frac{35}{3}$

30. Si $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

determine X , si se sabe que: $(2X)^t + A^t = 2B$, indique la traza de X .

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

31. Se definen la matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i-j, & \text{si } i \leq j \\ i+2j, & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{y la matriz}$$

$B = (b_{ij})_{3 \times 4}$, como : $b_{ij} = i+j-1$ sea

$C = AB$. Determine el valor de c_{23} .

- A) 11 B) 18 C) 25
D) 32 E) 43

32. Considere las matrices

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} i^2, & i < j \\ 2, & i = j \\ i-j, & i > j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3} \text{ tal que } b_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ n, & i = j \\ i+j, & i > j \end{cases}$$

Si $M = (m_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $M = AB$, entonces determine el valor de

$$T = m_{11} + m_{13} + m_{32} - m_{23}$$

- A) 12 B) 15 C) 17
D) 21 E) 42

33. Se define la matriz

$$A_{8 \times 8} = \begin{cases} a_{ij} = -1, & i = j \\ a_{ij} = 1, & i \neq j \end{cases}$$

Si $B = A \cdot A^t$, entonces determine la suma de los elementos $b_{22} + b_{44}$ de la matriz B .

- A) 12 B) 14 C) 18
D) 16 E) 20

34. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 5 \end{bmatrix}$$

Si A y B son matrices conmutables, determine el valor de $T = 2x + 3y$.

- A) -1 B) 0 C) 2
D) 5 E) 7

35. Sean A y X dos matrices definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y el}$$

conjunto M definido por:

$M = \{(a; b; c; d) / XA = AX\}$, determine

por extensión el conjunto M.

A) $M = \{(1; 0; 0; 0)\}$

B) $M = \{(0; 0; 1; 2)\}$

C) $M = \{(a; 0; 0; d) / a, d \in \mathbb{R}\}$

D) $M = \{(0; 1; 0; 0) / c \in \mathbb{R}\}$

E) $M = \emptyset$

36. Dado el sistema de matrices:

$$A + B^1 - C = I$$

$$A^1 - B + 2C^1 = 3I$$

$$2A + B + C = 5I$$

Determine la matriz B.

A) I B) 2I C) -I

D) 3I E) 1/2 I

37. Acerca de las matrices A, B y C, se dan los siguientes enunciados:

I. Si A no es nula, entonces A^2 no es nula.

II. Si B es una matriz simétrica entonces $(B + B^1)^1 = 2B$.

III. Si $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $C^5 = I_2$.

Indique cuál(es) correctas.

A) I y II B) II y III C) I y III

D) solo III E) I, II y III

38. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & x - x^2 \\ x^2 - x & 0 \end{pmatrix}$

y $n \in \mathbb{N}$, entonces halle la

$$\text{Tr}(A^{4n} + A^{4n+1}).$$

A) 0 B) $(x^2 - x)^{4n} (x^2 - x + 1)$

C) $(x^2 - x)^{4n} (-x^2 + x + 1)$ D) $2(x^2 - x)^{4n}$

E) $-2(x^2 - x)^{4n+1}$

39. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, halle

$$M^{1003}$$

A) $x^{1003} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $x^{1003} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

C) $x^{1003} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ D) $x^{1003} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E) $x^{1003} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

40. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ determine la suma de los elementos de } A^{40}.$$

A) 6^{12} B) 6^{13} C) 6^{14}

D) 6^{15} E) 6^{16}

41. Determine la matriz $E = A^{16} + A^{17}$, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix} 100 & -100 \\ 100 & -100 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -200 & -100 \\ -100 & -200 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 384 & -384 \\ -384 & 384 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 3 \times 2^{15} & -3 \times 2^{15} \\ -3 \times 2^{15} & 3 \times 2^{15} \end{bmatrix}$

42. Se define la matriz : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tal

$$\text{que: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y dado}$$

los siguientes enunciados

I. $a_n = c_n$

II. $a_{n+1} - a_n = 1$

III. $b_{n+1} - b_n = a_n$

IV. $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Determine cuál(es) son correctas.

- A) I, III y IV B) solo I C) II y III
D) I, II, III y IV E) solo II

43. Si X es una matriz que satisface la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log_2 \pi & 0 \\ \log_5 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determine el valor de la $\text{Tr}(X^{-2})$.

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{3}$
D) $\frac{17}{9}$ E) 2

44. Determine la traza de la matriz X tal que se cumple la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- A) 26 B) 27 C) 28
D) 29 E) 30

45. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule

la traza de la matriz inversa de A.

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

46. Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

X es una matriz que satisface la ecuación: $A^2 = AX^{-1}$, determine la traza de la matriz X:

- A) -19 B) -13 C) -6
D) 5 E) 12

47. Sea la matriz: $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y dado

los siguientes enunciados

I. $D + D^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & -1 & 7/2 \\ 1/2 & 3 & 9/2 \\ 1/2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

II. $\text{Tr} D^{-1} = 3$

III. $D - D^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 5 & 5/2 \\ 3/2 & 3 & 7/2 \\ 3/2 & 3 & 7/2 \end{pmatrix}$

Cuál(es) son correctas

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

48. Dadas las matrices A y B tales que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ o & u & e \\ o & o & f \end{pmatrix}$$

si B es la inversa de A, calcule

$$T = a + b + c + d + e + f$$

- A) 25 B) 26 C) 28
D) 29 E) 30

49. Dados los siguientes enunciados (con $A_{n \times n}$ y $B_{n \times n}$)

I. Si A y B conmutan entonces A y B^{-1} conmutan.

II. Si A y B conmutan entonces A^{-1} y B^{-1} conmutan.

III. Si $M = A^{-1}BA$, A inversible entonces $M^n = A^{-1}B^{2n}A$.

Cuál(es) son correctas.

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

50. Sea $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} j & i < j \\ o & i = j \\ -i & i > j \end{cases}$

Calcule el determinante de A.

- A) 0 B) 1 C) 120
D) 1024 E) 2040

51. Si $B = (b_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n tal que $b_{ij} + b_{ji} = \begin{cases} 2 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ tal que $A \cdot B + AB^T = 6I$. Calcule $|A|$.
 A) 3^n B) $4 \cdot 3^n$ C) -2^n
 D) 0 E) 3^{n+1}
52. Si A es de orden 4×4 y $|A| = 5\sqrt{2}$ determine el valor de $T = ||A^2| \cdot |A|| |A|$.
 A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$
53. Si A es una matriz de orden 5 tal que $((|A^{-3}| + 1)(|A^{-1}|^3 + 2) = 42$, determine el valor de " h " de modo que $(1-h)|A|^1 + 8|A|^2 = -15 \wedge |A| \in \mathbb{Q}$.
 A) -33 B) -35 C) -39
 D) -41 E) -43
54. Sea $C = HAH^{-1}$ / $|C| \neq 0, k \in \mathbb{R}$. Simplificar:
 $E = (|kI - A| + |kI - C|)$
 $(|kI - A| - |kI - C|)$
 A) 0 B) $|A + C|$ C) $2|A - C|$
 D) $|A + I|$ E) $|A - C|$
55. Sean A y B dos matrices de orden 3×3 donde $|A| = 5, |B| = 2$. Determine el valor de:
 $E = \frac{|A^T \cdot 2B^T| \cdot |A^T|}{|AB|}$
 A) 250 000 B) 256 000 C) 100 000
 D) 120 000 E) 300 000
56. Sea A una matriz cuadrada de orden 4×4 con $|A| = 2$. Determine el valor de $|(A \cdot A)^{-1}(2A)|$.
 A) 2 B) 4 C) 8
 D) 16 E) 32
57. Determine la matriz inversa de $A^2 + I$, si A cumple $A^4 + A^3 + 2A^2 + A = 0$, donde $|A| \neq 0$.
 A) $A^2 - A + I$ B) $A^2 + A - I$
 C) $A^2 + A + I$ D) $A^2 + 2A + I$
 E) $A^2 - 2A + I$
58. Si $H = \begin{pmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ su valor del $\det(H) = 4$, determine H^2 , de cómo respuesta la suma de dichos elementos de H^2 .
 A) -8 B) -6 C) 0
 D) 1 E) 2
59. Determine los valores de " x " para los cuales la matriz dada es singular.
 $A = \begin{pmatrix} \log(35 - x^3) & \log(5 - x) \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
 De cómo respuesta la suma de estos valores.
 A) 0 B) 2 C) 5
 D) 6 E) 35
60. Para $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\cos \alpha \neq \pm 1$ cuáles(es) de los siguientes enunciados son verdaderos
 I. $\text{traz}(A^{-1}) = 2\cos \alpha + 3$
 II. $|A^2| = (\cos^2 \alpha - 1)^2$
 III. $|(A^4)^{-1} A^2| = \cos^2 \alpha + 1$
 A) solo II B) I y II C) I y III
 D) solo III E) II y III
61. Se define las matrices:
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2x & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ x-1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
 Determine el valor de x , tal que $|2A - B| = 8x^2 - 20x - 4$.
 A) 2 B) 1 C) -2
 D) 3 E) -3

62. Los polinomios

$$P(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = x^2 - 1$$

Tienen una raíz común. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

$$\text{I. } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{II. } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{III. } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = 0$$

- A) solo I B) I y II C) solo II
D) I y III E) I, II y III

63. Determine el mayor valor que debe tomar "k", para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}, \text{ no tenga inversa.}$$

- A) $1 - \sqrt{5}$ B) $1 - \sqrt{3}$ C) $1 + \sqrt{2}$
D) $1 + \sqrt{3}$ E) $1 + \sqrt{5}$

64. Determine los valores de x para los

$$\text{cuales la matriz: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ x & x+2 & x-2 \\ 4 & x & 8 \end{pmatrix}; \text{ es}$$

singular.

- A) $\left\{-3; \frac{4}{3}\right\}$ B) $\left\{-\frac{4}{3}; 3\right\}$
C) $\left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$ D) $\left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$
E) $\left\{-4; \frac{3}{2}\right\}$

65. Se define el conjunto A, mediante:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \begin{vmatrix} 2x & x+1 & -1 \\ 3x+1 & 2x+2 & -x-2 \\ 2x & x+1 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Determine el número de elementos de A.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

66. De la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -20 \\ 5 & -4 & 1 & -15 \\ -1 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 6 = \overline{ab}$$

Determine: $a + b + a^2 + b^2$

- A) 40 B) 41 C) 42
D) 43 E) 44

67. Determine el valor del siguiente

$$\text{determinante: } \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

- A) 0 B) 62 C) 154
D) 208 E) 242

68. Determine el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

para $a = \sqrt[3]{72}$, $b = \sqrt[3]{108}$

- A) 6 B) 36 C) 216
D) 1296 E) 6^5

69. Si B es la matriz definida por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ calcule el } |B|$$

- A) -189 B) -180 C) 180
D) 189 E) 200

70. Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} x-y & x+y & x+y & x+y \\ x-y & x+y & x+y & x-y \\ x-y & x+y & x-y & x-y \\ x+y & x-y & x-y & x-y \end{bmatrix}$$

Entonces el valor del $\det(A)$ es:

- A) x^3y B) xy^3 C) x^3y^3
D) $8x^3y$ E) $16xy^3$

71. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

- A) -40 B) -39 C) 0
D) 18 E) 26

72. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

- A) 90 B) 100 C) 110
D) 120 E) 180

73. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

- A) 0 B) 4 C) 64
D) 128 E) 240

74. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- A) 6 B) 64 C) 16
D) 10 E) 8

75. Indicar el valor del determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 & \log 20000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2000 & \log^2 20000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2000 & \log^3 20000 \\ \log^4 2 & \log^4 20 & \log^4 200 & \log^4 2000 & \log^4 20000 \end{vmatrix}$$

- A) 12 B) 36 C) 72
D) 44 E) 288

76. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$ definido por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

Entonces el valor de $\det(A)$ es:

- A) $a^n + b^n$ B) $a^n - b^n$
 C) $(-1)^{n+1} a^n + b^n$ D) $a^n + (-1)^{n+1} b^n$
 E) $a^n b^n$

77. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ ax & a & -1 & 0 & 0 \\ ax^2 & ax & a & -1 & 0 \\ ax^3 & ax^2 & ax & a & -1 \\ ax^4 & ax^3 & ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$$

- A) $a^4 x^4$ B) $a(a+x)^4$
 C) $a^5(a+x)^4$ D) $(a+x)x^4$
 E) $(a-x)(a+x)^4$

78. Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyo determinante es d ($d \neq 0$). Si $B = A^n$ y la matriz C se obtiene multiplicando por d a la tercera y cuarta fila de la matriz B. Calcule el valor del $\det(ABC)$.

- A) d^n B) d^{n+2} C) d^{2n+3}
 D) $d^{n(n+2)}$ E) $d^{2n(n+2)}$

79. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

- I. Cualquier determinante $|a_{ij}|_{n \times n}$ de orden superior a 2 y tal que $a_{ij} = i - j$, es cero.
 II. Si A, B y C son tres matrices de orden n tales que $|B| \neq 0$ y $AB - CB = 0$ entonces $A = C$.
 III. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n con $AB \neq BA$, se cumple que $|AB| = |BA|$.
 A) solo I B) II y III C) solo III
 D) I y III E) I, II y III

80. Sean A, B y C matrices de orden $n \times n$. Dados los siguientes enunciados:

- I. Si $|A| = |B| \rightarrow \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.
 II. Si $A^T B^{-1}$ es no singular $\rightarrow A^{-1}$ es no singular.

III. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$

Indique cuál(es) son correctos.

- A) solo I B) solo II C) solo III
 D) II y III E) I y III

81. Calcule $|A_{n \times n}|$.

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & i = j \\ n, & i \neq j, n \in N \end{cases}$$

- A) nl B) $(-1)^n nl$
 C) $(-1)^{n-1} nl$ D) $(-1)^n ((n+1)l)$ E) 0

82. Sea el sistema: $\begin{cases} ax + y = 3 \\ x - by = 4 \end{cases}$

Determine el valor de $a + b$ si el sistema tiene como conjunto solución $\{(1; 1)\}$.

- A) 1 B) 2 C) -1
 D) 3 E) -2

83. Determine los valores de a, de manera que el sistema $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = a^2 \end{cases}$

tenga solución única

- A) $a \in R$ B) $a \in R - \{-1\}$
 C) $a \in R - \{1\}$ D) $a \in R - \{-1, 1\}$
 E) $a \in R^*$

84. Determine los valores de a, para que el sistema lineal $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ tenga soluciones positivas.

- A) R B) $(-\infty, 0)$ C) $(-\infty, -1)$
 D) $(-\infty, 1)$ E) $(-\infty, 1/2)$

85. Si el sistema lineal :

$$\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 42 \\ (2a+b)x + (3a-2b)y = 113 \end{cases}$$

admite como solución a:

$x = -2$ ^ $y = 5$, determine el valor de $T = a + b$.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

86. Al resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} (m^2 - 1)x + (m + 1)^2 y = m - 1 \\ (m + 1)x + (m - 1)y = m + 1 \end{cases}$$

De los siguientes enunciados

- I. $\Delta x + \Delta y = -2m(3m + 5)$
II. Si $m = 0$ el sistema es incompatible.
III. Si $m = -1$ el sistema es indeterminado.

Cuál(es) son correctos.

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

87. Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} ax - y = 2 - a \\ 2x - (a+1)y = 2, a \in R \end{cases}$$

y dados los siguientes enunciados

- I. Si $a = 1$ el sistema es indeterminado.
II. Si $a = -2$ el sistema es incompatible
III. Si $a \neq 0$ el sistema es compatible

Cuál(es) son correctos

- A) solo I B) I y II C) solo II
D) I y III E) I, II y III

88. El siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+1)x - 3y = 2m \\ 4x - my = m+3 \end{cases}$$

es indeterminado para $m = k_1$ e incompatible para $m = k_2$. Determine el valor de $J = 2k_1 + 3k_2$.

- A) -6 B) -8 C) -10
D) 4 E) 2

89. Un tanque tiene dos orificios de desagüe. Se abren los dos y cuando llevan una hora vaciando, se obstruye uno de ellos y tarde el otro 2h12m en vaciar el resto. Pero si hubiera sido este orificio el obstruido, el otro

hubiera terminado de vaciar el estanque en 2h45m. ¿En cuántas horas hubiera podido vaciar el estanque cada uno de los orificios?

- A) 2h; 3h B) 4h; 5h C) 3h; 4h
D) 5h y 6h E) 4h y 6h

90. Que valor debe tomar "k", en el sistema lineal:

$$(k+1)x + 2y = 3$$

$$k^2x - (k-2)y = 4$$

para que sea inconsistente

- A) 0 B) $\frac{3}{4}$ C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) 2

91. Un inversionista tiene \$ 80,000 en inversiones al 10% y 12% anual ¿cuánto invierte en cada una si obtiene ingresos anuales de \$ 9 000?

- A) \$50,000 al 12%
\$30,000 al 10%
B) \$45,000 al 10%
\$35,000 al 12%
C) \$25,000 al 10%
\$55,000 al 12%
D) \$60,000 al 10%
\$20,000 al 12%
E) \$35,000 al 10%
\$45,000 al 12%

92. Si $A = \{(a, b) \in R^2 / \text{el sistema lineal:}$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ by + z = a \end{cases};$$

tenga infinitas soluciones), determine el número de elementos del conjunto $A(\eta(A))$

- A) 1 B) 2 C) 0
D) 3 E) 4

93. Sea el sistema lineal:

$$\begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \\ cy + bz = a \end{cases}$$

Determine el valor de x:

$$\begin{aligned} A) \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc} & \quad B) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ C) \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2bc} & \quad D) \frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2bc} \\ E) \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc} \end{aligned}$$

94. Si el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ x - y - 2z = 2a \\ x + 2y + 2z = 4a \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

es consistente, entonces x.y.z.a es:

$$\begin{aligned} A) 4 & \quad B) -4 & C) 8 \\ D) -8 & \quad E) 16 \end{aligned}$$

95. Determine los valores del parámetro m de manera que el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} (1-m)x + y - z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ x - y - (1-m)z = 0 \end{cases}$$

presenta soluciones diferentes a las triviales.

$$\begin{aligned} A) m = 0 \vee m = 1 & \quad B) m = -1 \vee m = 1 \\ C) m = 0 \vee m = 2 & \quad D) m = 1 \vee m = 2 \\ E) m = 0 \vee m = 3 \end{aligned}$$

96. Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 1/2x - y - z = 2 \end{cases}$$

usando el método de cramer.

Determine el valor de E = 3x + y - z

$$\begin{aligned} A) 1 & \quad B) 2 & C) 3 \\ D) 4 & \quad E) 5 \end{aligned}$$

97. A partir del sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 4x - 3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 21z = 0 \end{cases}$$

De los siguientes enunciados

- El sistema posee solución única.
- El sistema es incompatible.
- El sistema es indeterminado.

Cuál(es) son correctos

$$\begin{aligned} A) \text{ solo I} & \quad B) \text{ solo II} & C) \text{ I y II} \\ D) \text{ solo III} & \quad E) \text{ solo II y III} \end{aligned}$$

98. Calcule z al resolver el sistema

$$\frac{x+y}{a-b} = a+b \dots (1)$$

$$\frac{x-z}{a+b} = a-b \dots (2)$$

$$\frac{x-z}{z-y} = \frac{a+b}{a-b} \dots (3)$$

$$\begin{aligned} A) ab & \quad B) (a-b)^2 & C) a^2 + b^2 \\ D) \frac{(a-b)^2}{2} & \quad E) a+b \end{aligned}$$

99. Resolver el sistema:

$$\frac{5}{2x+y} + \frac{4}{2x-3y} = 5$$

$$\frac{15}{2x+y} + \frac{2}{2x-3y} = 5$$

Si el C.S = {(x₀, y₀)} entonces4x₀ + 9y₀ es:

$$\begin{aligned} A) 17 & \quad B) 21 & C) 22 \\ D) 26 & \quad E) 31 \end{aligned}$$

100. Resolver el sistema en R
- ⁺

$$x + y = \frac{1}{15}xyz$$

$$x + z = \frac{11}{120}xyz$$

$$z + y = \frac{13}{120}xyz$$

Entonces el valor de T = x + y + z es

$$\begin{aligned} A) 3 & \quad B) 8 & C) 12 \\ D) 14 & \quad E) 16 \end{aligned}$$

101. Resolver el sistema:

$$x + y = y + z + 4 = z + x - 8 = 6 \text{ y}$$

determine $(x - y + z)$

- A) 15 B) 16 C) 17
D) 20 E) 25

102. Si
- $A = \{(x_0, y_0, z_0)\}$
- es el conjunto solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{xy}{5x+4y} = 6 \\ \frac{xz}{3x+2z} = 8 \\ \frac{yz}{3y+5z} = 6 \end{cases}$$

Entonces, calcule el valor de

$$T = \frac{2y_0}{x_0 - z_0}$$

- A) 5 B) $\frac{15}{2}$ C) 10
D) $\frac{25}{2}$ E) 25

103. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases}$$

Indique el valor de x_4 .

- A) -4 B) -2 C) -1
D) 1 E) 2

104. Si $A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$

además $\bar{b} \in R^n, \bar{x} \in R^n$ respecto al sistema lineal: $A\bar{x} = \bar{b}$ y

Dado los siguientes enunciados

- I. No tiene solución.
II. Tiene solución única.
III. Tiene infinitas soluciones
Cuál(es) son correctos
A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) I y II

105. Determine el mínimo valor de
- z
- que satisface el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x + y = 12; \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}$$

$$x^2 + y^2 = z$$

- A) 6 B) 36 C) 45
D) 72 E) 80

106. Determine cuántas soluciones reales tiene el sistema:

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 992 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

107. Determine la suma de sus soluciones enteras en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$x^2 - y^2 - x + y = 0, \dots \dots (1)$$

$$x + y^2 - 2 = 0, \dots \dots (2)$$

- A) -4 B) -3 C) -2
D) -1 E) -5

108. Sea el sistema
- $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Determine un valor de $T = x + 3y$:

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

109. Determine cuántas soluciones racionales presenta el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5 \end{cases}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

110. Determine la solución real x e y del sistema:

$$\begin{cases} x^3 + x^2(y+1) + y^2 + xy + x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Calcule el valor de $T = x - 2y^3$

- A) -125 B) -131 C) 125
D) 131 E) -124

111. Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{17}{4} \\ x(x+y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52 \end{cases}$$

Dados los siguientes enunciados:

- I. El sistema posee 4 soluciones reales.
II. El sistema es inconsistente.
III. El sistema posee solución única.
Cuál(es) son correctos.
A) solo I B) I y III C) I, II y III
D) I y II E) II y III

112. El par ordenado que cumple en el sistema:

$$\begin{cases} (x+y)^{1/2} - (x-y)^{1/2} = \left(\frac{5}{14}\right)(x^2 - y^2)^{1/2} \\ (x+y)^{-1/2} + (x-y)^{-1/2} = \left(\frac{9}{14}\right) \end{cases}$$

es (x_0, y_0) , determine: $4x_0 - 2y_0$.

- A) $\frac{25}{2}$ B) 28 C) 53
D) 61 E) 72

113. Al resolver el sistema no lineal

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^3 & z^3 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 176 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determine el valor de la suma de las cuartas potencias de una solución.

- A) 81 B) 16 C) 1250
D) 625 E) 0

114. Resolver el sistema:

$$a = \frac{x^2 - y}{1 - xy}, \quad b = \frac{y^2 - x}{1 - xy}, \quad \text{Indique el valor de "y".}$$

- A) $\frac{b-a^2}{ab-1}$ B) $\frac{a-b^2}{ab-1}$ C) $\frac{a-b}{ab-1}$
D) $\frac{b-a}{ab-1}$ E) $\frac{1}{ab-1}$

115. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 70 \\ x\sqrt{xy} + y^2 = 105 \end{cases}$$

Determine el valor de $T = x \cdot y$

- A) 36 B) 12 C) 18
D) 32 E) 0

116. Al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_8 y + \log_8 z = 5 \\ \log_3 y + \log_{27} z + \log_{27} x = 5 \\ \log_4 z + \log_{64} x + \log_{64} y = 5 \end{cases}$$

Determine el valor de x .

- A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ C) 2
D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) 3

117. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tal que satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2(4^x) \\ x + y + z = 16 \end{cases}$$

Entonces determine el valor de

$$T = \text{antilog}_y \sqrt{x} + 3 \text{colog}_2 y + \log_x (\log_y z)$$

- A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

SOLUCIONARIO

5^{to} SEMINARIO - TALLER

ALGEBRA

$$\textcircled{1} z = \frac{(6+8i)^4 (4\sqrt{3}i)^{27} (4\sqrt{3}i)^{30}}{(4-3i)^4 + (1-\sqrt{3}i)^{30}}$$

RECUERDE

$$(1+\sqrt{3}i)^3 = (1-\sqrt{3}i)^3 = -8$$

$$z = \frac{2^4 (3+4i)^4 [(1+\sqrt{3}i)^3]^9}{(4-3i)^4 + [(1+\sqrt{3}i)^3]^{10} + [(1-\sqrt{3}i)^3]^{10}}$$

$$z = 2^4 \left[\frac{3+4i}{4-3i} \right]^4 (-8)^9 + (-8)^{10} + (-8)^{10}$$

$$= 2^4 \left[\frac{3+4i}{3+4i} \right] (-2^{27}) + 2^{30} + 2^{30}$$

$$= 2^4 (-2^{27}) + 2 \cdot 2^{30} = -2^{31} + 2^{31}$$

$$\therefore z = 0$$

\textcircled{2} Por partes:

$$\begin{aligned} * (1+3i)^4 &= [(1+3i)^2]^2 = (2+2\sqrt{3}i)^2 \\ &= 2^2 (1+\sqrt{3}i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} \cdot \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}+i} &= \frac{2i+2\sqrt{2}i}{2-i} \\ &= \frac{2i+2\sqrt{2}i}{2-i} \end{aligned}$$

$$= \frac{4+3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{5(4+2i)}{5}$$

$$= 4+2i$$

En M:

$$M = 4(4+2i) - 4 \therefore M = 8i$$

\textcircled{3} Se puede escribir:

$$2i = (e^{Ln 8})^{2i} \rightarrow 2i = 8^{2i}$$

$$\rightarrow 2i = 2^{30i} \quad \begin{cases} i = 30i \\ \therefore 30 = 1/3 \end{cases}$$

\textcircled{4} Escribimos: $(\bar{z}-1)^4 = [(\bar{z}-i)^2]^2$

$$\rightarrow \frac{(\bar{z}-1)^4}{(\bar{z}-i)^4} = 1 \rightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-i} = \sqrt[4]{1}$$

$$\text{PERO: } \sqrt[4]{1} = e^{i \frac{2k\pi}{4}} = e^{i \frac{k\pi}{2}}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

OJO: EN EL CASO QUE $k=0$, SE TIENE: $\sqrt[4]{1} = 1$

$$\rightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-i} = 1 \rightarrow -1 = -i \text{ / ABSURDO!}$$

O SEA QUE: $k \neq 0$

LUEGO:

$$\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-i} = e^{i \frac{k\pi}{2}} \rightarrow \bar{z}-1 = (\bar{z}-i) e^{i \frac{k\pi}{2}}$$

DESPEJAMOS $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \frac{1-i e^{i \frac{k\pi}{2}}}{1-e^{i \frac{k\pi}{2}}}; k = 1, 2, 3$$

$$\textcircled{5} \cdot z = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$$

LEVAMOS A FORMA TRIGONOMÉTRICA:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2}$$

LEGUENDE

$$\sim |z| = \sqrt{8}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}; \theta \in \text{IC}$$

$$\text{OSJ: } \text{tg } \theta = 2+\sqrt{3} \rightarrow \theta = 75^\circ$$

$$\rightarrow z = \sqrt{8} \cos 75^\circ$$

Luego: $z^{12} = \sqrt[12]{8} \text{cis}(15^\circ \times 12)$
 900°

$z^{12} = 8^{\frac{1}{12}} \text{cis}(122^\circ + 180^\circ)$
 $= 2^{18} \text{cis}(180^\circ + 180^\circ)$
 -1

$z^{12} = -2^{18} + 0i$
 $\therefore \text{Re}(z^{12}) = -2^{18}$

⑥ Obs: $x^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

$x^3 = M(\text{cis } 135^\circ)$

$x = \sqrt[3]{M} \left[\text{cis} \left(\frac{3\pi + 2k\pi}{3} \right) \right]$

$k = 0; 1; 2$

$k=0 \rightarrow x_0 = \sqrt[3]{M} \text{cis} \frac{\pi}{4}$ RAÍZ PRINCIPAL

Obsérvese: $\frac{\pi}{4} < 45^\circ \in \text{IC}$

$k=1 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{M} \text{cis} \frac{11\pi}{12}$

Obs: $\frac{11\pi}{12} < 165^\circ \in \text{II C}$

$k=2 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{M} \text{cis} \frac{19\pi}{12}$

Obs: $\frac{19\pi}{12} < 285^\circ \in \text{IV C}$

CON TODO ESTO:

(I) ES F; (II) ES V; (III) ES F

$\therefore$ SÓLO (II) ES CORRECTO

⑦ SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\frac{(1+i)^{51} \cdot (\sqrt{3}-i)^{28}}{i(1+i)^{29} \cdot [-i(\sqrt{3}-i)]^{38}}$$

DE AQUÍ: $\frac{(1+i)^{22}}{(1+i)^{67} \cdot (\sqrt{3}-i)^{10}}; i^6 = i^3 = -i$

RECUERDE

$(1+i)^4 = -4$	$(1+i)^2 = 2i$
$-i = i^{-1}$	$(\sqrt{3}-i)^3 = -8i$

¡NO LO OLVIDE!

TRANSFORMEMOS PARA APLICAR:

$$\frac{[(1+i)^4]^5 \cdot (1+i)^2}{(-i) \cdot [(\sqrt{3}-i)^3] \cdot (\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{i \cdot (-4)^5 \cdot (2i) \cdot \sqrt{3}+i}{(-8i)^3 (\sqrt{3}-i) \cdot \sqrt{3}+i}$$

RACIONALIZANDO Y TENIENDO EN CUENTA POTENCIAS DE i :

$$\frac{(i)(-4^5)(2i)(\sqrt{3}+i)}{-8^3(-i)(4)}$$

$$= \frac{-4^5 \cdot 2i^2 (\sqrt{3}+i) \cdot (\sqrt{3}+i)}{8^3 \cdot 4}$$

$$= \frac{-2^{11}(\sqrt{3}-1)}{2^{11}} = 1 - \sqrt{3}i$$

NOTA: OTRA FORMA DE CALCULAR ES TRANSFORMANDO LOS COMPLEJOS A FORMA TRIGONOMÉTRICA. ¡HÁZGALO!

⑧ Obs: La base de cada sumando es de la forma: $\frac{a+bi}{a-bi}$

TRANSFORMANDO SE TIENE:

$$\frac{a+bi}{a-bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2-b^2}$$

HACIENDO ESTO PARA CADA SUMANDO BASE, SE TIENE:

$$\frac{i^2 + i^4 + i^6 + i^8 + \dots + i^{4n}}{}$$

"2n" SUMANDOS

$$= \frac{-1}{0} + \frac{1}{0} + \frac{-1}{0} + \dots + \frac{1}{0} = 0$$

9) LLEVAMOS A FORMA TRIGONOMÉTRICA: $(1-i)^3 = (2 \cos 315^\circ)^3$

$$(1-i)^3 = 2\sqrt{2} \cos 945^\circ$$

$$\sim (1-i)^3 = 2\sqrt{2} \cos 225^\circ$$

$$\hookrightarrow z = 2\sqrt{2} \cos 225^\circ \cdot \cos\left(\frac{x+180^\circ+360^\circ k}{2}\right)$$

$$K=0; 1$$

$$(1) \text{ SI } K=0 \rightarrow z_0 = 2\sqrt{2} \cos\left(225^\circ + \frac{x+180^\circ}{2}\right)$$

OBJ: z SERÁ IMAGINARIO PURO,

$$\text{SI } \cos\left(\frac{225^\circ + x + 180^\circ}{2}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow 90^\circ; 270^\circ; 450^\circ; \dots$$

COMO $0^\circ \leq x < 360^\circ$, ENTONCES LA ÚNICA POSIBILIDAD ES:

$$225^\circ + \frac{x}{2} + 90^\circ = 450^\circ \rightarrow x = 270^\circ$$

(2) PARA $K=1$, TAMBIÉN SE OBTIENE: $x = 270^\circ$ (VERIFÍQUELO)

CON ESTO: (I) ES F; (II) ES F;

(III) ES V $\therefore$ PERO (III) ES CORRECTO

$$10) (1) \text{ SI } z = (-2+2\sqrt{3}i)^6$$

$$\sim z = (-2)^6 (1-\sqrt{3}i)^6$$

PERO EN LA RESOLUCIÓN 1 SE DIJO

$$\text{QUE: } (1-\sqrt{3}i)^3 = -8$$

$$\hookrightarrow (1-\sqrt{3}i)^6 = (-8)^2 = 64 = 2^6$$

$$\text{OJEA: } z = 2^6 \cdot 2^6 \rightarrow z = 2^{12} \quad \hookrightarrow \text{(I) ES V}$$

$$(1) \text{ OBJ: } z = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$z = 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$\sim iz = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{DE AQUÍ: } e^{iz} = e^{-2+2\sqrt{3}i}$$

$$\sim |e^{iz}| = |e^{-2+2\sqrt{3}i}| = e^{-2}$$

$$\hookrightarrow \text{(II) ES F}$$

(1) APLIQUEMOS PROPIEDADES:

$$(1) \text{ SI } |z+1| < 1; \text{ COMO } |z+1| = |\overline{z+1}|$$

$$\rightarrow |\overline{z+1}| < 1 \rightarrow |\overline{z}+1| < 1$$

$$\rightarrow |\overline{z}+1| < 1 \dots (\alpha)$$

$$(2) \text{ SI } |\overline{z}+1| < 1 \rightarrow |\overline{\overline{z}+1}| < 1$$

$$\rightarrow |\overline{\overline{z}+1}| < 1 \rightarrow |z+1| < 1 \dots (\beta)$$

DE (α) Y (β):

$$|z+1| < 1 \leftrightarrow |\overline{z}+1| < 1$$

$$\hookrightarrow \text{(III) ES V}$$

$\therefore$ (I) Y (III) SON CORRECTOS

$$11) \text{ SI } E \text{ ES RAÍZ DE } z^5 - 1 = 0$$

$$\hookrightarrow E^5 - 1 = 0 \rightarrow E^5 = 1$$

TRANSFORMEMOS W PARA APROVECHAR $E^5 = 1$. BUSQUEMOS HO MODO DE ENLACE LAS FRACCIONES.

$$+ f_1 = \frac{1}{1-E}$$

$$+ f_2 = \frac{1}{1+E^3} \cdot \frac{1-E^3}{1-E^3} = \frac{1-E^3}{1-E^6}$$

$$\text{PERO: } E^6 = E^5 \cdot E \rightarrow E^6 = E$$

$$\rightarrow f_2 = \frac{1-E^3}{1-E}$$

$$f_3 = \frac{E^2}{1-E^4} \cdot \frac{E}{E-E^5} = \frac{E^3}{E-E^5} = \frac{E^3}{E-E}$$

$$\rightarrow f_3 = \frac{-E^3}{1-E}$$

Luego:

$$W = \frac{1}{1-E} - \frac{1-E^3}{1-E} + \frac{-E^3}{1-E} = \frac{0}{1-E}$$

$$\Rightarrow W=0 \quad \therefore \operatorname{Re}(W)=0$$

$$(12) \cdot x^{50} - i = 1 \rightarrow x^{50} = 1+i$$

$$\text{Ojo: } 1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{50}}$$

$$\text{Entonces: } x_k = \sqrt[50]{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{50} \right)$$

$$k=0; 1; 2; \dots; 49$$

Para saber cuántas raíces se encuentran en el III C, el argumento de las raíces deben caer en dicho cuadrante, para esto:

$$\pi < \frac{\pi + 2k\pi}{50} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{De aquí: } \pi < \frac{\pi(1+2k)}{50} < \frac{3\pi}{2}$$

Despejando k: $24,8 < k < 37,3$

$$\Rightarrow k = 25; 26; \dots; 37$$

13 valores

Obs: Por cada valor de k, existe una raíz en el III C.

$\therefore$ Existen 13 raíces

$$(13) \text{ CALCULEMOS ASÍ: } i = -i^3 \text{ ¿SI?}$$

$$\Rightarrow z = -i^3$$

De aquí, sacando $\sqrt[3]{}$:

$$\Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-i^3} \Rightarrow \sqrt[3]{z} = -i$$

$\therefore$ Una raíz cúbica es: $-i$

$$(14) z = 1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt[2]{z} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right)$$

$$k=0; 1; 2; 3; \dots; 8$$

Ahora, calculando los argumentos de cada una de las raíces, se determina en qué cuadrante se hallan dichas raíces.

$$+ k=0 \Rightarrow \arg(z_0) = \frac{\pi}{36} \Rightarrow z_0 \in \text{IC}$$

$$+ k=1 \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 \in \text{IC}$$

$$+ k=2 \Rightarrow \arg(z_2) = \frac{5\pi}{36} \Rightarrow z_2 \in \text{IC}$$

$$+ k=3 \Rightarrow \arg(z_3) = \frac{7\pi}{36} \Rightarrow z_3 \in \text{IC}$$

$$+ k=4 \Rightarrow \arg(z_4) = \frac{9\pi}{36} \Rightarrow z_4 \in \text{IC}$$

$$+ k=5 \Rightarrow \arg(z_5) = \frac{11\pi}{36} \Rightarrow z_5 \in \text{IC}$$

$$+ k=6 \Rightarrow \arg(z_6) = \frac{13\pi}{36} \Rightarrow z_6 \in \text{IC}$$

$$+ k=7 \Rightarrow \arg(z_7) = \frac{15\pi}{36} \Rightarrow z_7 \in \text{IC}$$

$$+ k=8 \Rightarrow \arg(z_8) = \frac{17\pi}{36} \Rightarrow z_8 \in \text{IC}$$

con esto:

(I) es F; (II) es F; (III) es V

$\therefore$ Sólo (III) es correcto

$$(15) \text{ Sea } z = x+iy \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$$

• Multiplicando y dividiendo por

POR SU CONJUGADO, SE TIENE:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

EN A: $1 < \frac{-y}{x^2+y^2} \wedge \frac{-y}{x^2+y^2} < \frac{x}{x^2+y^2}$

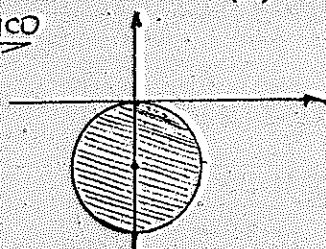
(1) (2)

DE (1): $x^2+y^2+y < 0$

SUMO $\frac{1}{4}$: $x^2+y^2+y+\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

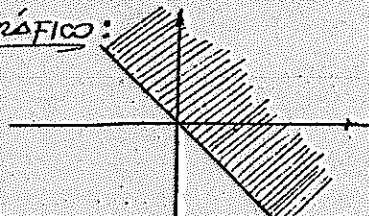
$$\Rightarrow x^2+(y+\frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2$$

GRÁFICO:

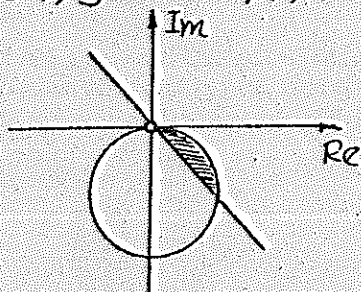


DE (2): $-y \leq x \rightarrow y \geq -x$

GRÁFICO:



LA INTERSECCIÓN DE LAS GRÁFICAS NOS DA LA REGIÓN DE TODAS LAS $z \in A$; OJO: CON $z \neq (0,0)$.



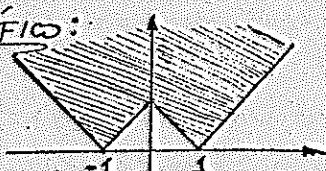
(16) SEA $z = x+yi$

EN A: $|y| > ||x|-1|$

ANALICEMOS ASÍ:

• SI $y > 0 \rightarrow y > |x|-1$

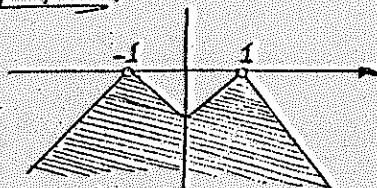
GRÁFICO:



• SI $y < 0 \rightarrow -y > |x|-1$

O TAMBIÉN: $y < -|x|+1$

GRÁFICO:



LA UNIÓN DE LAS GRÁFICAS NOS REPRODUCE LA GRÁFICA DE A.

$\therefore$ CLAVE: B)

(17) SEA $z = x+yi$

EN A: $|x|+x-|y| \geq 1$

• SI $y \geq 0 \rightarrow |x|+x-y \geq 1 \dots (1)$

O TAMBIÉN: $y \leq |x|+x-1$

AGUÍ: SI $x \geq 0 \rightarrow y \leq 2x-1$

PERO NO OLVIDE QUE: $y \geq 0$

GRÁFICO:

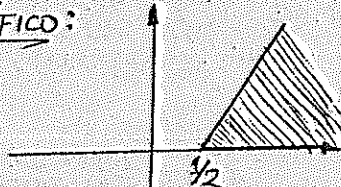


GRÁFICO (x)

AHORA: SI $x < 0 \rightarrow y \leq -1$
PERO COMO $y > 0$

EN ESTE CASO NO EXISTEN ZEA
LUEGO, DECIMOS: LA GRÁFICA
DE (1), VIENE DADO POR EL
GRÁFICO (α)

• SI $y < 0 \rightarrow |x| + x + y > 1 \dots (2)$
 $\Rightarrow y > 1 - x - |x|$

ASÍ: SI $x > 0 \rightarrow y > 1 - 2x$
PERO RECUERDE QUE: $y < 0$

GRÁFICO:

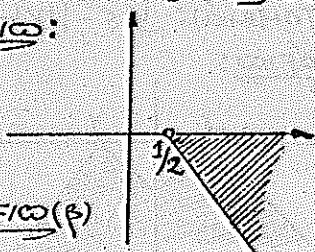


GRÁFICO (β)

AHORA, SI $x < 0 \rightarrow y > 1$
PERO COMO $y < 0$

EN ESTE CASO NO EXISTEN ZEA
LUEGO, LA GRÁFICA DE (2), VIENE
DADO POR EL GRÁFICO (β)

FINALMENTE EL GRÁFICO DE A
VIENE DADO POR GRAF(α) U GRAF(β)

∴ CLAVE: A

(18) SEA: $z = x + yi$

$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$; $z \neq 0$
(VER RESOLUCIÓN 15)

DEM:

$|z| \leq 1 - \text{Im}(\text{Re}(z)) \leq 1 \quad (\alpha)$

Δ → DIFERENCIA
SIMETRICA

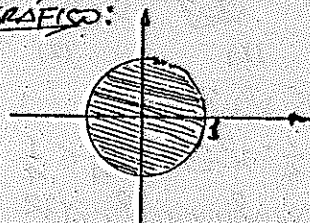
$\text{Re}[\text{Re}(\frac{1}{z}) + \text{Im}(\frac{1}{z})] \geq \frac{1}{2} \quad (\beta)$

• EN (α): $\text{Im}(\text{Re}(z)) = \text{Im}(x) = 0$

DECIMOS: $|z| \leq 1 \leq 1$

SEA: $x^2 + y^2 \leq 1$

SU GRÁFICO:



• OBS: $\text{Re}(\frac{1}{z}) + \text{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$; $z \neq 0$

$\text{Re}(\text{Re}(\frac{1}{z}) + \text{Im}(\frac{1}{z})) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

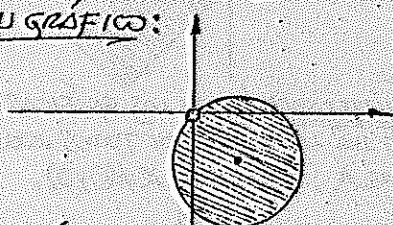
• EN (β): $\frac{x-y}{x^2+y^2} \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2(x-y) \geq x^2 + y^2$

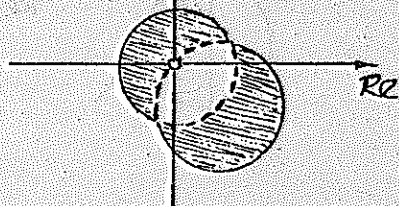
$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y \leq 0$

• SUMO 2: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \leq 2$
 $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq \sqrt{2}^2$

SU GRÁFICO:



POR ÚLTIMO, LA GRÁFICA DE LA DIFERENCIA SIMETRICA DE DICHAS GRÁFICAS ES:



$$19) A = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(1+z) + \operatorname{Im}(\bar{z}-i) < 1\}$$

DEA: $w = \bar{z} + 2i z^*$; si $z = a+bi$

$$\hookrightarrow w = a-4i + 2i(-a-bi)$$

$$w = \frac{(a+2b)}{x} - \frac{(2a+b)i}{y}$$

DEF: $w = x-yi$

DE $\operatorname{Re}(1+z) + \operatorname{Im}(\bar{z}-i) < 1$

$$\operatorname{Re}(1) + \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(\bar{z}) - \operatorname{Im}(i) < 1$$

$$(1) + (a) + (-b) - (-1) < 1$$

$$\hookrightarrow a-b < -1 \dots (*)$$

PERO, COMO: $a+2b=x$
 $2a+b=y$ $\left. \begin{array}{l} (*) \\ (-) \end{array} \right\}$

RESTANDO COMO SE INDICA:

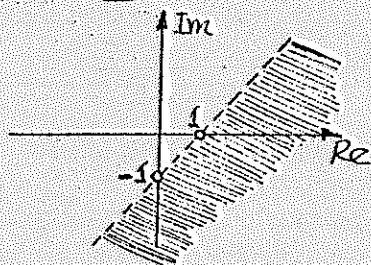
$$a-b = y-x$$

EN (*) : $y-x < -1$ ó $y < x-1$

DEA BUE: $A = \{w \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(w) < \operatorname{Re}(w) - 1\}$

ó $A = \{x-yi / y < x-1\}$

GRÁFICO: $y < x-1$



$$20) A = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(\bar{z}^2) \leq 2 \wedge \left| \frac{z-2}{z+2} \right| \leq 1 \wedge \frac{3\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) < 2\pi\}$$

SEA $z = x+yi$

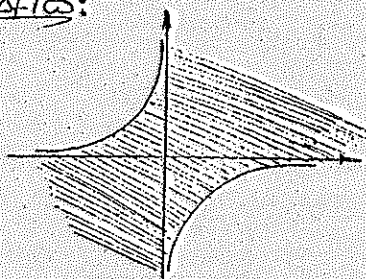
DEA: (*) $\operatorname{Im}(\bar{z}^2) \leq 2$

DEF: $\bar{z}^2 = \bar{z} \cdot \bar{z} = (x-yi)(x-yi)$
 $\hookrightarrow \bar{z}^2 = (x^2-y^2) - 2xyi$

DEF: $\operatorname{Im}(\bar{z}^2) = -2xy$

$$\hookrightarrow -2xy \leq 2 \rightarrow \underline{xy \geq -1}$$

GRÁFICO:



(**) $\left| \frac{z-2}{z+2} \right| \leq 1 \rightarrow |z-2| \leq |z+2|$
 QTO: $z \neq -2$

ASÍ: $|(x-2)+yi| \leq |(x+2)+yi|$

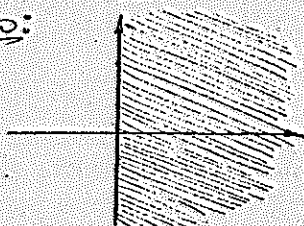
$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} \leq \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

ELEVADO AL CUADRO Y REDUCIDO:

$$\rightarrow (x-2)^2 - (x+2)^2 \geq 0 \rightarrow 4(x)(2) \geq 0$$

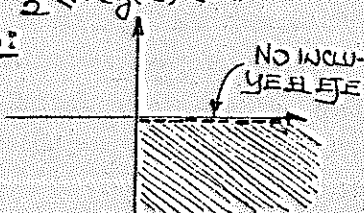
DE ASÍ: $\underline{x \geq 0}$

GRÁFICO:



(***) DE $\frac{3\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) < 2\pi$

GRÁFICO:



FINALMENTE, INTERSECTANDO LOS 3 GRÁFICOS, SE OBTIENE LA GRÁFICA DEL CONJUNTO A. CLAVE: D

(21) SEA $Z = a + bi / a + b \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow a^2 + b^2 \leq 42$

Además: $iZ^2 = i(a + bi)^2$
 $\sim iZ^2 = -2ab + (a^2 - b^2)i$

DE AQUÍ:

$|e^{iZ^2}| = |e^{-2ab + (a^2 - b^2)i}| = e^{-2ab}$

Por tanto: $e^{-2ab} \leq 1$

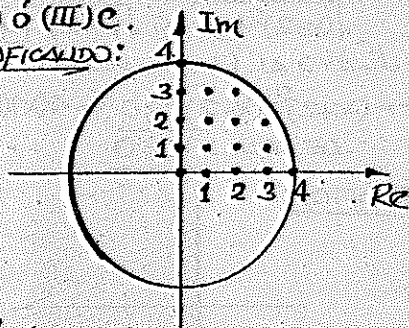
$\rightarrow e^{-2ab} \leq e^0 \Rightarrow -2ab \leq 0$

Donde: $ab \geq 0$

y $a^2 + b^2 \leq 42$; $a, b \in \mathbb{Z}$

Obs: Las componentes de $Z(a + bi)$ deben tener el mismo signo, pudiendo ser nulos. Con esto los Z pedidos pertenecen al (I) ó (III) e.

Gráficoado:



Obs: En el IC existen 8 complejos, incluyendo a los complejos sobre los ejes, serían en total 17. En el III e se presentará lo mismo, habría en total 34 complejos ¡PERO!

Hay que descartar el complejo que se está repitiendo: $Z(0,0)$

$n(Z) = \# \text{TOTAL DE COMPLEJOS} = 33$

(22) DE $Z(2 + i)Z - (13 - 13i) = 0$
 POR FÓRMULA:

$Z = \frac{-(2+i) \pm \sqrt{55 - 48i}}{2} \dots (I)$

• CALCULEMOS LAS RAÍCES DE $\sqrt{55 - 48i}$

$\sqrt{55 - 48i} \rightarrow \sqrt{\frac{|Z| + 55}{2}} - i \sqrt{\frac{|Z| - 55}{2}}$
 $\rightarrow -\sqrt{\frac{|Z| + 55}{2}} + i \sqrt{\frac{|Z| - 55}{2}}$

PERO: $|Z| = \sqrt{(55)^2 + (-48)^2} = 73$

REEMPLAZANDO ARRIBA, SE TIENE:

$\sqrt{55 - 48i} \rightarrow + (8 - 3i)$
 $\rightarrow - (8 - 3i)$

EN (I): $Z = \frac{-(2+i) \pm (8-3i)}{2}$

DE AQUÍ, SE OBTIENE:

$Z_1 = -5 + i$; $Z_2 = 3 - 2i$

(23) FACTORICEMOS POR DIVISORES BINOMIOS:

	3	-145i	3-8i	1+3i
1	↓	3	-45i	-1-3i
	3	-45i	-1-3i	0
1-i	↓	3-3i	1+3i	
	3	-142i	0	

$(x-1)(x-1+i)(3x-1+2i) = 0$

DE AQUÍ:

$3x-1+2i = 0 \Rightarrow x = \frac{1-2i}{3}$

(24) CONSTRUYENDO A:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore \Sigma \text{ELEMENTOS DE A} = 6$

(25) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, VEMOS QUE:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

PERO $A \neq \mathbf{0}$! $\Rightarrow$ (I) ES F

(ii) Si A y B SON ANTISIMÉTRICAS:

$$A^t = -A \quad \text{ó} \quad A = -A^t$$

$$B^t = -B \quad \text{ó} \quad B = -B^t$$

$$\begin{aligned} \underbrace{(AB - BA)}_M &= \underbrace{A^t B^t}_M - \underbrace{B^t A^t}_M \\ &= (BA)^t - (AB)^t \\ &= -[(AB)^t - (BA)^t] \\ &= -\underbrace{(AB - BA)}_M^t \\ &= -M^t \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow M = -M^t \quad \text{ó} \quad M^t = -M$$

Def: M ES ANTISIMÉTRICA

$\Rightarrow$ (II) ES V

(iii) PRIMERO, AB EXISTE SI

$$A = A_{m \times n} \text{ y } B = B_{n \times p}$$

$$\text{LUEGO: } (A_{m \times n} \cdot B_{n \times p})^t = C_{q \times 1}$$

$$\hookrightarrow B_{p \times n} \cdot A_{n \times m}^t = C_{q \times 1}$$

$$\text{DE AQUÍ: } p = q \wedge m = 1$$

$$\hookrightarrow A = A_{1 \times n} \rightarrow A \text{ ES MATRIZ FILA}$$

$\Rightarrow$ (III) ES V

$\therefore$ (II) y (III) SON CORRECTOS

(26) Si A ES SIMÉTRICA, LOS ELEMENTOS A AMBOS LADOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL (LOS ESQUIDISTANTES) SON IGUALES.

$$\Rightarrow 2b = 2 \wedge b = 0 \wedge x = 0$$

VEMOS QUE: $0 = 2 \rightarrow x = 2$

$$\text{LUEGO: } B = (2b + x)A = \underline{4A}$$

(27) FACTORIZANDO P :

$$P(x, y) = (2x - y)(x - y)$$

$$\Rightarrow P(A, B) = (2A - B)(A - B) \dots (I)$$

PERO:

$$+ 2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$+ A - B = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

EN (I):

$$P(A, B) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 8 \\ -36 & -15 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Σ ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL: $\underline{33}$

(28) CONSTRUYENDO B : $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{LUEGO, EN: } \underline{A + B = C}$$

$$\begin{bmatrix} x - 2y & y - z + 3 \\ 2x + 2y + 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{DE AQUÍ: } + x - 2y = 0 \dots (1)$$

$$+ y - z = 1 \dots (2)$$

$$+ 2x + 2y = 3 \dots (3)$$

$$\text{DE (1) y (3): } x = 1; y = 1/2$$

$$\text{EN (2): } z = -1/2$$

$$\therefore x + y + z = \underline{1}$$

(29) CONSTRUYENDO A , SE TIENE:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{DE } (2B - A A^t)^t = 2x = (x + B)^t$$

$$\hookrightarrow (2B)^t - (A A^t)^t = 2x = x^t + B^t$$

$$2B^t - AA^t - B^t = 2X + X^t$$

$$\sim B^t - AA^t = 2X + X^t$$

$$\text{Aquí: } \text{tr}(B^t - AA^t) = \text{tr}(2X + X^t)$$

$$\frac{\text{tr}(B^t)}{\text{tr}(B)} - \frac{\text{tr}(AA^t)}{\text{tr}(A)} = \frac{\text{tr}(2X)}{\text{tr}(X)} + \frac{\text{tr}(X^t)}{\text{tr}(X)}$$

$$\sim \text{tr}(B) - \text{tr}(AA^t) = 3\text{tr}(X) \dots (I)$$

PERO:

$$AA^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\text{Oj: } \text{tr}(AA^t) = 59 \wedge \text{tr}(B) = 0$$

$$\text{Fu(I): } 0 - 59 = 3\text{tr}(X) \therefore \text{tr}(X) = \frac{-59}{3}$$

$$(30) \text{ DE } (2X)^t + A^t = 2B$$

$$\rightarrow \text{tr}[(2X)^t + A^t] = \text{tr}(2B)$$

$$\rightarrow \text{tr}(2X^t) + \text{tr}(A^t) = 2\text{tr}(B)$$

$$\rightarrow \text{tr}(2X) + \text{tr}(A) = 2\text{tr}(B)$$

$$\text{DE AQUÍ: } 2\text{tr}(X) = \frac{2\text{tr}(B) - \text{tr}(A)}{10 \quad 6}$$

$$2\text{tr}(X) = 14 \therefore \text{tr}(X) = 7$$

$$\text{NOTA: } \text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$$

$$(31) \text{ CONSTRUYENDO LAS MATRICES:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

LUEGO, SIENDO $C = AB$, VEMOS QUE EL ELEMENTO C_{23} SE OBTIENE MULTIPLICANDO f_2 DE A POR C_3 DE B.

$$\hookrightarrow C_{23} = (4)(3) + (2)(4) + (1)(5) = 25$$

$$(32) \text{ CONSTRUYENDO LAS MATRICES:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 3 & n & 0 \\ 4 & 5 & n \end{bmatrix}$$

LUEGO:

$$M = AB = \begin{bmatrix} 2n+7 & * & n \\ * & * & 4n \\ * & n+10 & * \end{bmatrix}$$

$$\diamond T = (2n+7) + (n) + (n+10) - 4n$$

$$\therefore T = \frac{17}{2}$$

$$(33) \text{ DE ACUERDO A LA REGLA DADA PARA A, TODOS LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL VALEN -1 y TODOS LOS DEMÁS VALEN 1; CON ESTO A ES MATRIZ SIMÉTRICA, POR TANTO } A^t = A$$

$$\hookrightarrow B = A^2$$

DONDE:

$b_{22} \rightarrow$ ES EL ELEMENTO OBTENIDO DE MULTIPLICAR LOS ELEMENTOS DE f_2 POR LOS DE C_2

$b_{44} \rightarrow$ ES EL ELEMENTO OBTENIDO DE MULTIPLICAR LOS ELEMENTOS DE f_4 POR LOS DE C_4

$$\therefore b_{22} + c_{44} = 8 + 8 = 16$$

$$(34) \text{ Si A y B SON CONMUTABLES } \hookrightarrow AB = BA$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x-y & -3 \\ 3x+y & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 & -x+1 \\ 2y+15 & -y+5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Oj: } 2x-y = 2x+3 \rightarrow y = -3$$

$$-3 = -x+1 \rightarrow x = 4$$

$$\therefore T = 2(4) + 3(-3) = -1$$

(35) DEM: $XA = AX$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS: $b=0 \wedge c=0$

FINALMENTE:

$$M = \{ (a; 0; 0; d) / a, y d \in \mathbb{R} \}$$

(36) TRANSFORMEMOS LA 2ª EC, ASÍ:

$$(A^t - B + 2C^t)^t = (3I)^t$$

$$\rightarrow (A^t)^t - B^t + (2C^t)^t = 3I^t$$

$$A - B^t + 2C = 3I \quad \text{---} \quad \textcircled{+}$$

$$\text{DE LA 1ª EC: } A + B^t - C = I$$

$$\text{SUMANDO: } 3A + C = 4I$$

$$\text{LA 3ª EC. DICE: } 2A + B + C = 5I$$

SE CONOCE

$$\rightarrow B + 4I = 5I \quad \therefore B = I$$

(37) SUPONGAMOS $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$

$$\nrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $\nrightarrow$ (I) ES F(38) DE $(B + B^t)^t = 2B$

$$\rightarrow B^t + (B^t)^t = 2B \rightarrow B^t + B = 2B$$

 $\rightarrow B^t = B$, POR TANTO: SI B ES SI-MÉTRICA ES CIERTO QUE $B^t = B$ $\nrightarrow$ (II) ES V

$$(39) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nrightarrow C^2 = CC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ADEMÁS:

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\text{LUEGO: } C^6 = C^3 \cdot C^3 = (-I)(-I) = I = I$$

 $\therefore$ (II) y (III) SON CORRECTOS $\nrightarrow$ (III) ES V(38) $\text{tr}(A^{4n} + A^{4n+1}) = \text{tr}(A^{4n}) + \text{tr}(A^{4n+1}) = ?$ HAGAMOS: $X^2 \cdot X = a$; CON ESTO:

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nrightarrow A^2 = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 = a^2 (-I) \Rightarrow (A^2)^{2n} = (-a^2 I)^{2n}$$

$$\rightarrow A^{4n} = a^{4n} I$$

$$\text{DE AQUÍ: } \text{tr}(A^{4n}) = 2(a^{4n})$$

$$\text{ADEMÁS: } A^{4n} \cdot A = a^{4n} I \cdot A$$

$$\nrightarrow A^{4n+1} = a^{4n} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{OBS: } \text{tr}(A^{4n+1}) = 0$$

$$\therefore \text{tr}(A^{4n} + A^{4n+1}) = 2(a^{4n}) + 0 = 2a^{4n}$$

$$\text{RECONOCIENDO: } 2(X^2 \cdot X)^{4n}$$

(39) SIMILAR AL PROB. ANTERIOR:

$$M = X \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nrightarrow M^2 = X^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{DONDE: } M^2 = X^2 (-I)$$

$$\text{DE AQUÍ: } (M^2)^{501} = (X^2 (-I))^{501}$$

$$\nrightarrow M^{1002} = X^{1002} \cdot (-I)$$

$$\text{POR M: } M^{1003} = X^{1002} \cdot (-I) M$$

$$\nrightarrow M^{1003} = X^{1002} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LUEGO:

$$\star A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\star A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6I$$

DE AQUÍ:

$$(A^3)^{13} = (6I)^{13} \rightarrow A^{39} = 6^{13}I$$

$$\rightarrow A^{39} \cdot A = 6^{13}I \cdot A \rightarrow A^{40} = 6^{13}A$$

¡DECIR:

$$A^{40} = 6^{13} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\diamond \sum \text{DE ELEMENTOS DE } A^{40} \text{ ES:}$$

$$6^{13}(1+2+3) = 6^{14}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

LUEGO:

$$\star A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2A$$

$$\text{POR } A: A^3 = 2^2 A$$

$$\text{POR } A: A^4 = 2^3 A$$

$$\vdots$$

$$A^{16} = 2^{15} A$$

$$A^{17} = 2^{16} A$$

$$\star A^{16} + A^{17} = 2^{15} A + 2 \cdot 2^{15} A$$

$$E = 3 \cdot 2^{15} A$$

$$\therefore E = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{15} & -3 \cdot 2^{15} \\ -3 \cdot 2^{15} & 3 \cdot 2^{15} \end{bmatrix}$$

42

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1 \times 0}{2}$$

LUEGO:

$$\star A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{2 \times 1}{2}$$

$$\star A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{3 \times 2}{2}$$

$$\star A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{4 \times 3}{2}$$

$\vdots$

$$\diamond A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

$$a_n = n; b_n = \frac{n(n-1)}{2}; c_n = n$$

$$\text{CON ESTO: } a_{n+1} = n+1; b_{n+1} = \frac{(n+1)n}{2}$$

LUEGO:

$$(I) \in V; (II) \in V; (III) \in V; (IV) \in V$$

$\therefore (I), (II), (III) \text{ y } (IV) \text{ SON CORRECTOS}$

43

$$\text{OBS: } \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n i & 0 \\ \sum_{i=1}^n 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

LA IGUALDAD QUEDARÁ ASÍ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

DE AQUÍ:

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

OJO:

$$* \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LUEGO:

$$X^T = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} \\ X^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\nabla X^2 = \frac{\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -15 & 9 \end{vmatrix}}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{tr}(X^2) = \frac{1}{9}(9+6) = \frac{5}{3}$$

LUEGO:

$$X = \frac{\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} \\ X = \begin{pmatrix} 23 & -6 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Tr}(X) = 23 + 4 = 27$$

45) HALLAMOS LA MATRIZ INVERSA POR OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS (MÉTODO DE GAUSS-JORDÁN)

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_1 - f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_3 - f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} f_1 + f_3 \\ f_2 + f_3 \\ f_3 \div (-1) \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{A^{-1}}$$

$$\text{OBS: } \text{tr}(A^{-1}) = 1 + 0 + 0 = 1$$

44) SIMILAR A LA REDUCCIÓN ANTERIOR.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{OJO: } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$46) \text{ DE } A^t = A X^{-1}$$

MULTIPLICAMOS POR $(A^t)^{-1}$ Y X ; ASÍ:

$$\underbrace{(A^t)^{-1}}_I \cdot \underbrace{A^t}_A \cdot X = \underbrace{(A^t)^{-1}}_I \cdot \underbrace{A \cdot X^{-1}}_I \cdot X$$

$$\hookrightarrow X = (A^t)^{-1} A \dots (\alpha)$$

CALCULEMOS $(A^t)^{-1}$:

$$[(A^t)^{-1} : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_2 - f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{f_3 - f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} f_1 - 3f_3 \\ f_2 + f_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

 $(A^t)^{-1}$

EN (v):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -17 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \text{tr}(X) = -19$

47

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

CALCULEMOS D^{-1}

$$[D : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} f_1 - 2f_2 \\ f_3 - 2f_2 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} f_1 - f_3 \\ f_2 - f_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

 D^{-1}

OBSERVAMOS:

$$(*) D D^{-1} = \begin{bmatrix} 9/2 & -1 & 7/2 \\ 1/2 & 3 & 9/2 \\ 1/2 & 5 & 5/2 \end{bmatrix} \nrightarrow (I) \text{ ES F}$$

$$(**) \text{Tr}(D^{-1}) = 3 \nrightarrow (III) \text{ ES V}$$

$$(***) D - D^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 5 & 5/2 \\ 3/2 & 3 & 7/2 \\ 3/2 & 3 & 7/2 \end{bmatrix} \nrightarrow (III) \text{ ES V}$$

$\therefore (II) \text{ y } (III) \text{ SON CORRECTOS}$

48) Si B es INVERSA DE A $\nrightarrow AB = I$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} a & b-d & c-e-f \\ 0 & d/2 & e/2-f \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OBS: $a=1$; $d=2$; $f=4$

$$* b=d \rightarrow b=2 \quad * e=f \rightarrow e=8$$

$$* c=e+f \rightarrow c=12$$

$$\therefore T = 21b + c + d + e + f = 29 \quad \checkmark$$

(49) (*) Si A y B CONMUTAN ∇ $BA = AB$

• POR B^{-1} : $BA B^{-1} = \underbrace{AB B^{-1}}_I$

$$\rightarrow BAB^{-1} = A$$

• POR B^{-1} : $\underbrace{B^{-1}BA}IB^{-1} = B^{-1}A$

$$\rightarrow AB^{-1} = B^{-1}A$$

Obs: A y B^{-1} CONMUTAN ∇ (I) ES V

(++) USANDO LO ANTERIOR: $B^{-1}A = AB^{-1}$

• POR A^{-1} : $B^{-1} \underbrace{AA^{-1}}_I = AB^{-1}A^{-1}$

$$\rightarrow B^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$$

• POR A^{-1} : $A^{-1}B^{-1} = \underbrace{A^{-1}AB^{-1}}_I A^{-1}$

$$\rightarrow A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Obs: A^{-1} y B^{-1} CONMUTAN ∇ (II) ES V

(+++*) Si $M = A^{-1}BA$

$$\rightarrow M^2 = M \cdot M = A^{-1} \underbrace{BA A^{-1}}_I BA$$

$$\rightarrow M^2 = A^{-1} \underbrace{BIBA}_I \rightarrow M^2 = A^{-1} B^2 A$$

• POR M : $M^3 = M A^{-1} B^2 A$

$$\rightarrow M^3 = A^{-1} B \underbrace{A A^{-1}}_I B^2 A$$

$$\rightarrow M^3 = A^{-1} B^3 A$$

DESEÑEJE, SI SEGUIMOS ASÍ SUCE-
SIVAMENTE, SE TIENE:

$$M^n = A^{-1} B^n A \quad \nabla \text{ (III) ES F}$$

$\therefore$ (I) y (II) SON CORRECTOS $\checkmark$

(50) LUEGO DE CONSTRUIR LA MATRIZ
 A , SE TIENE:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & 0 & 4 & 5 \\ -4 & -4 & -4 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: LA MATRIZ ES ANTISIMÉTRICA
DE ORDEN IMPAR (ORDEN 5). POR
TANTO, POR PROPIEDAD EL DETER-
MINANTE DE TODA MATRIZ DE ES-
TE TIPO VALE 0. $\checkmark$

(51) CONSTRUYENDO LA MATRIZ, SEGÚN
REGLA:

$$B + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

DE AQUÍ: $|B + B^T| = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ VECES}} = 2^n$

• LA IGUALDAD: $AB + AB^T = 6I$

$$\rightarrow A(B + B^T) = 6I \rightarrow |A(B + B^T)| = |6I|$$

$$\rightarrow |A| |B + B^T| = 6^n |I|$$

• AQUÍ: $|A| \cdot 2^n = 6^n \cdot 1 \therefore |A| = \frac{6^n}{2^n} \quad \checkmark$

(52) DE $T = |A^2| |A^4| |A|$; $|A| = \frac{50\sqrt{2}}{2}$

$$= |A^2|^4 |A^4| |A|$$

$$= |A|^8 |A| |A| = |A|^{10}$$

LUEGO: $T = \left(\frac{50\sqrt{2}}{2}\right)^{10} \therefore T = \frac{5^9 \sqrt{2}}{2} \quad \checkmark$

53) Obj: $|A^{-3}| = |A^{-1}|^3$

$$\diamond (|A^{-1}|^3 + 1)(|A^{-1}|^3 + 2) = 42$$

$$\rightarrow |A^{-1}|^6 + 3|A^{-1}|^3 + 2 = 42$$

$$\rightarrow |A^{-1}|^6 + 3|A^{-1}|^3 - 40 = 0$$

$$\begin{array}{c} |A^{-1}|^3 \\ |A^{-1}|^3 \end{array} \begin{array}{c} 8 \\ -5 \end{array}$$

$$\rightarrow (|A^{-1}|^3 + 8)(|A^{-1}|^3 + 5) = 0$$

DE AQUÍ:

$$+ |A^{-1}|^3 = -8 \rightarrow |A^{-1}| = -2$$

$$\rightarrow |A|^{-1} = -2 \rightarrow |A| = -\frac{1}{2}$$

DE $(1-h)|A^1| + 8|A^2| = -15$

$$\rightarrow (1-h)|A| + 8|A|^2 = -15$$

REEMPLAZANDO VALOR:

$$(1-h)\left(-\frac{1}{2}\right) + 8\left(\frac{1}{4}\right) = -15$$

$$\rightarrow \frac{h-1}{2} + 2 = -15 \therefore h = -33$$

NOTA: DE $|A^{-1}|^3 = 5 \rightarrow |A| \notin \mathbb{Q}$

55) TRANSFORMEMOS "E" APLICANDO PROPIEDADES (VERIFIQUE):

$$E = \frac{|A^T \cdot 2B^T|^3 |A^T|}{|A||B|}; \quad |A^T| = |A|$$

$$= \frac{(|A^T|^3 |B^T|^3) |A|}{|A||B|} = \frac{(|A| \times 2^3 |B|)^3}{|B|}$$

REEMPLAZANDO VALORES:

$$E = \frac{(5 \times 8 \times 2)^3}{2} \therefore E = 256000$$

56) APLICANDO PROPIEDADES:

$$|(A^t A)^{-1} (2A)^t| = |(A^t A)^{-1}| |(2A)^t|$$

$$= |A^t A|^{-1} |2A|$$

$$= (|A^t| |A|)^{-1} \times 2^4 |A|$$

$$= \frac{1}{|A||A|} \times 2^4 |A|$$

REEMPLAZANDO VALOR: $\frac{16}{2} = 8$

54) $E = |KI-A|^2 = |KI-C|^2$; $C = HAH^{-1}$

SE SABE QUE: $I = H I H^{-1}$

REEMPLAZANDO EN "E":

$$E = |KI-A|^2 = |K H I H^{-1} - H A H^{-1}|^2$$

$$= |KI-A|^2 = |H(KI-A)H^{-1}|^2$$

$$= |KI-A|^2 = (|H| |KI-A| |H^{-1}|)^2$$

$$= |KI-A|^2 = (|H| |KI-A| |H|^{-1})^2$$

VALE 1

$$\therefore E = |KI-A|^2 = |KI-A|^2$$

$$\therefore E = 0$$

57) EN LA IGUALDAD DADA SUMEMOS I Y DESCOMPONGASE $2A^2$:

$$A^4 + A^3 + A^2 + A^2 + A + I = I$$

$$\rightarrow A^2(A^2 + I) + A(A^2 + I) + (A^2 + I) = I$$

$$(A^2 + A + I)(A^2 + I) = I$$

5) INVERSA DE $(A^2 + I)$

$$\therefore (A^2 + I)^{-1} = A^2 + A + I$$

58) Obj: $\det(H) = \begin{vmatrix} x^2 - 3 & \\ x & 1 \end{vmatrix} = 4$ (dato)

$$\rightarrow \det(H) = x^2 + 3x = 4$$

$$\rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } x = -4 \vee x = 1.$$

$$\bullet \text{ Si } x = -1 \rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{DONDE: } H^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Sigma \text{ELEM. DE } H^2: -8$$

NOTA: PARA $x = -4$ NO APARECE RESPUESTA.

$$(59) A = \begin{pmatrix} \lg(35-x^2) & \lg(5-x) \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

SE RÁ MATRIZ SINGULAR, SI $|A| = 0$

$$\text{LUEGO: } |A| = \lg(35-x^2) - 3\lg(5-x) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } \lg(35-x^2) = \lg(5-x)^3$$

$$\text{No } 25 - x^2 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3$$

$$\rightarrow x^3 - 5x + 18 = 0; x \notin \mathbb{R}$$

$$\text{OBS: } \Sigma \text{DE LAS "X": } 5$$

$$(60) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(*) A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ -1 & \cos \alpha \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ -1 & \cos \alpha \end{pmatrix}}{\cos^2 \alpha - 1}$$

$$\text{No } A^{-1} = -\frac{1}{\cos^2 \alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ -1 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \text{traz}(A^{-1}) = -\frac{1}{\cos^2 \alpha} (2 \cos \alpha)$$

$\hookrightarrow$ (I) EF

$$(**) |A^2| = |A|^2 = (\cos^2 \alpha - 1)^2$$

$\hookrightarrow$ (II) EF

$$\begin{aligned} (++) |A^2|^{-1} A^2 &= |A^2|^{-1} |A^2| \\ &= |A^2|^{-1} |A|^2 \\ &= |A|^{-1} |A|^2 = |A| \\ &= \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ SÓLO (II) ES VERDADERO

(61) REEMPLAZANDO LAS MATRICES, SE TIENE:

$$|2A - B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3-x & 2x-2 & -1 \\ -3 & 4x-2 & -3 \end{vmatrix}$$

DESARROLLANDO:

$$|2A - B| = -18x + 18 - 2(3-x)(4x-2) + 6 - 6(2x-2) + 3(4x-2) + 6(3-x)$$

EFFECTUANDO Y REDUCIENDO:

$$8x^2 - 52x + 60 = 8x^2 - 20x - 4$$

$$\rightarrow -32x = -64 \therefore x = \frac{2}{1} \quad (\text{DATO})$$

$$(62) \bullet P(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet Q(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

OBS: LA RAÍZ COMÚN NO PUEDE SER DEL TRINOMIO $x^2 + x + 1$ PORQUE ES

TAS SON COMPLEJOS Y TRIDUO

QUE PRESENTARSE POR PARES CONJUGADOS; Y EN ESTE CASO, TENDRÍAN

2 RAÍCES COMUNES.

$\hookrightarrow$ LA RAÍZ COMÚN ES: $x = 1$

$$\text{LUEGO: } P(1) = a + b + c = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = ?$$

SUMEMOS A C_1 TODAS LAS DEMÁS COLUMNAS:

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & c & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = 0$$

⇒ (I) y V

(II) EN FORMA SIMILAR AL ANTERIOR,
SE OBTIENE QUE (II) ES F

(III) EN FORMA IGUAL A LA I,
OBTENEMOS QUE: (III) ES V

∴ (I) y (III) SON CORRECTOS

(63)

$$A = \begin{pmatrix} K & 1 & -1 \\ 0 & 2 & K \\ 4 & 0 & -K \end{pmatrix}$$

NO TIENE INVERSA, SI $|A| = 0$

LUEGO: $|A| = -2K^2 + 4K + 8 = 0$

$$\rightarrow K^2 - 2K - 4 = 0$$

$$\rightarrow K = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} \rightarrow K = 1 \pm \sqrt{5}$$

∴ MAYOR VALOR DE K: $1 + \sqrt{5}$

(64)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ x & x+2 & x-2 \\ 4 & x & 8 \end{pmatrix}$$

SERÁ SINGULAR, SI $|A| = 0$

LUEGO:

$$|A| = 8(x+2) + 7x^2 - 8(x-2) - 28(x+2) = 0$$

$$-x(x-2) + 16x = 0$$

DE AQUÍ: $3x^2 - 5x - 12 = 0$

$$\begin{array}{r} 3x \quad 4 \\ \times \quad \quad \quad \\ \hline \quad \quad \quad -3 \end{array}$$

$$(3x+4)(x-3) = 0$$

ENTONCES: $x = -\frac{4}{3}$ y $x = 3$

∴ P.S. = $\{-\frac{4}{3}, 3\}$

(65) EN EL DETERMINANTE, HACEMOS:

$$f_1 - f_3; f_2 - 2f_3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2x+1 \\ -x+1 & 0 & -3x \\ 2x & x+1 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2x) \begin{vmatrix} -x+1 & 0 \\ 2x & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

DE AQUÍ: $-2x(1-x^2) = 0$

$$\Rightarrow x(1+x)(1-x) = 0$$

ENTONCES: $x = 0; x = -1; x = 1$

LUEGO: $A = \{0; -1; 1\}$

∴ # DE ELEM. DE A: 3

(66) CALCULEMOS

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -20 \\ 5 & -4 & 1 & -15 \\ -1 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & -5 \\ 2 & -15 & 0 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & -20 \\ -1 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

DESARROLLAMOS RESPECTO A C_3 :

$$(-1) \begin{vmatrix} 2 & -15 & -10 \\ 2 & 2 & -20 \\ -1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(-250) = 250$$

REEMPLAZANDO: $\sqrt{256} = \sqrt{b} \rightarrow \sqrt{b} = 16$

ENTONCES: $b = 1 \cdot b = 6 \therefore a+b+c+d^2 = 44$

(67)

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

SUMAMOS A C_1 TODAS LAS DEMÁS COLUMNAS:

$$\begin{vmatrix} 22 & 5 & 6 & 7 \\ 22 & 4 & 6 & 9 \\ 22 & 6 & 7 & 2 \\ 22 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 22 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

RESTAMOS f_1 A TODAS LAS DEMÁS FILAS:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 22$$

$$= 22 \times 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 22(2 - 2 + 2 + 5) = 22(7) = \underline{154}$$

(69)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

DESARROLLANDO RESPECTO A C_3 :

$$|B| = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 3(-30 + 4 + 12 - 12 + 3 - 40)$$

$$\therefore |B| = 3(-63) = \underline{-189}$$

(70)

$$|A| = \begin{vmatrix} x-y & x+y & x+y & x+y \\ x-y & x+y & x+y & x-y \\ x-y & x+y & x-y & x-y \\ x+y & x-y & x-y & x-y \end{vmatrix}$$

(68) $C_4 - C_3$; $C_3 - C_2$; $C_2 - C_1$

$$\begin{vmatrix} 1+a & -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & a & 0 \\ 1 & 0 & b & -b \\ 1 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$C_1 - \frac{1}{b} C_4: \begin{vmatrix} 1+a & -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$C_1 - \frac{1}{b} C_2: \begin{vmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = (ab)^2$$

REEMPLAZANDO VALORES:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{72} \cdot \sqrt[3]{108})^2 &= (\sqrt[3]{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3})^2 \\ &= (\sqrt[3]{(3 \cdot 2)^3})^2 \\ &= \underline{36} \end{aligned}$$

(71)

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2y & 0 \\ -2y & 2y & 0 & 0 \\ x+y & x-y & x-y & x-y \end{vmatrix} \\ f_2 - f_3 & \\ f_3 - f_4 & \end{aligned}$$

$$f_1 + f_2: \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 \\ 2x & x-y & x-y & x-y \end{vmatrix}$$

DESARROLLANDO RESPECTO A f_1 :

$$-(2y) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2y \\ 0 & 2y & 0 \\ 2x & x-y & x-y \end{vmatrix}$$

$$= -(2y)(-8xy^2) = \underline{16xy^3}$$

(71)

RESTAMOS C_1 A TODAS LAS DEMÁS COLUMNAS:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 19 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \cdot f_4 - f_3 \\ & \cdot f_3 - f_2 \\ & \cdot f_2 - f_1 \end{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 14 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 12 - 9 - 84 = -39$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

⑦

$$\begin{aligned} & \cdot f_5 - f_4 \\ & \cdot f_4 - f_3 \\ & \cdot f_3 - f_2 \\ & \cdot f_2 - f_1 \end{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$\begin{aligned} & \cdot f_5 - 3f_1 \\ & \cdot f_4 - 3f_1 \\ & \cdot f_3 - 3f_1 \\ & \cdot f_2 - 3f_1 \end{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 16(1) = 16$$

⑧

$$\begin{aligned} & \cdot f_5 + \frac{1}{2}f_1 \\ & \cdot f_4 + f_3 \\ & \cdot f_1 - 4f_3 \end{aligned} \begin{vmatrix} -6 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & -6 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

DE f_1 EXTRAEMOS (-2):

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & -6 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ (-2) \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} (=) \\ (=) \\ (-2)(0)=0 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$$

⑨ A ES LA DETERMINANTE DE VANDERMONDE (REVISE TEORÍA).

SU DESARROLLO VIENE DADO POR:

$$\begin{aligned} A = & (f_5 20000 - f_5 2000)(f_5 200000 \\ & - f_5 200)(f_5 200000 - f_5 20) \\ & (f_5 20000 - f_5 2)(f_5 20000 - f_5 200) \\ & (f_5 2000 - f_5 20)(f_5 2000 - f_5 2) \\ & (f_5 200 - f_5 20)(f_5 200 - f_5 2) \\ & (f_5 20 - f_5 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & (f_5 10)(f_5 100)(f_5 1000)(f_5 10000) \\ & (f_5 10)(f_5 100)(f_5 1000)(f_5 10) \\ & (f_5 100)(f_5 10). \end{aligned}$$

$$A = (1)(2)(3)(4)(1)(2)(3)(1)(2)(1)$$

$$\therefore A = 288$$

⑩ SUMAMOS A f_1 TODAS LAS DEMÁS FILAS Y LUEGO EXTRAEMOS 16 A f_1 :

76

A =

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

DESARROLLAMOS RESPECTO A LA 1ª COLUMNA:

A = a

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

DET. DE UNA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

+(-1)ⁿ⁺¹

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

DET. DE UNA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

$$\begin{aligned} \rightarrow A &= a(a^{n-1}) + (-1)^{n+1} b(b^{n-1}) \\ \therefore A &= a^n + (-1)^{n+1} b^n \end{aligned}$$

77

$$\begin{aligned} &C_4 - xC_3 \\ &C_3 - xC_2 \\ &C_2 - xC_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a(a+x)(a+x)(a+x)(a+x) \\ &= a(a+x)^4 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Si } B = A^n$$

$$\rightarrow \det(B) = \det(A^n) = (\det(A))^n$$

$$\rightarrow \det(B) = d^n$$

• Si la matriz C se obtiene multiplicando por d a la 3ª y 4ª fila de B

$$\rightarrow \det(C) = d^2 \cdot \det(B)$$

$$\det(C) = d^2 \cdot d^n$$

$$\det(C) = d^{n+2}$$

LUEGO:

$$\det(ABC) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C)$$

$$\therefore \det(ABC) = d^{2n+3}$$

78 (*) UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN n CUYOS ELEMENTOS SON

$a_{ij} = i - j$ ES UNA MATRIZ ANTISIMÉTRICA, CUMPLIÉNDOSE QUE:

"EL DETERMINANTE DE TODA MATRIZ ANTISIMÉTRICA DE ORDEN IMPAR VALE 0"

↪ (I) ES F

$$(*) |AB - CB| = 0 \rightarrow |(A - C)B| = 0$$

$$\rightarrow |A - C| |B| = 0; \text{ COMO } |B| \neq 0$$

$$\rightarrow |A - C| = 0 \quad (\text{DATO})$$

OTD: ASÍ, NO NECESARIAMENTE

(A - C) ES UNA MATRIZ NULA, POR TANTO NO NECESARIAMENTE A ES IGUAL A C ↪ (II) ES F

(*) SIENDO $AB \neq BA$

$$\bullet |AB| = |A| |B| \rightarrow |AB| = |BA|$$

$$\bullet |BA| = |A| |B| \rightarrow |AB| = |BA|$$

↪ (III) ES V

$\therefore$ SÓLO (III) ES CORRECTO

78 * $\det(A) = d$ (DATO)

78 (*) DADA LAS MATRICES:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

VEAMOS QUE:

$$|A| = |B| \text{ PERO... } \text{Tr}(A) \neq \text{Tr}(B)$$

⇨ (I) ES F

(**) Si $A^T B^{-1}$ ES NO SINGULAR

$$\rightarrow |A^T B^{-1}| \neq 0 \rightarrow |A^T| |B^{-1}| \neq 0$$

$$\rightarrow |A^T| \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow |A^{-1}| \neq 0$$

$$\rightarrow |A^{-1}| \neq 0 \rightarrow A^{-1} \text{ ES NO SINGULAR.}$$

⇨ (II) ES V

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$f_1 - f_3; f_3 - f_4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 5 \\ 5 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$f_2 + f_1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 5 \\ 5 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{OBS: } f_2 = f_3 \Rightarrow |A| = 0. \quad \text{⇨ (III) ES V}$$

∴ (II) y (III) CORRECTAS

(81) CONSTRUYENDO $|A|$, SEGÚN REGLA:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

RESTAMOS LA ÚLTIMA COLUMNA A TODAS LAS DEMÁS COLUMNAS:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1-n)(2-n)(3-n)\dots(n-2)(n-1) \times n$$

(n-1) FACTORES

$$= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)(n-2)(n-3)\dots 1 \times n$$

TAMBIÉN SE PUEDE ESCRIBIR:

$$|A| = (-1)^{n-1} \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-3)(n-2)(n-1))}_{\text{CONOCIDO}} \cdot n$$

$$\therefore |A| = (-1)^{n-1} \cdot n!$$

(82) Si $(x, y) = (1; 1)$ ES SOLUCIÓN DEL SISTEMA $\begin{cases} ax + y = 3 \\ x - by = 4 \end{cases}$

$$\text{REEMPLAZANDO: } \begin{cases} a + 1 = 3 \\ 1 - b = 4 \end{cases}$$

$$\text{OBS: } a = 2 \wedge b = -3 \therefore a + b = -1$$

(83) EL SISTEMA $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = a^2 \end{cases}$

TENDRÁ SOLUCIÓN ÚNICA SI SE CUMPLE QUE:

$$\frac{1}{a} \neq \frac{a}{1} \Rightarrow a^2 \neq 1$$

$$\rightarrow a \neq 1 \wedge -1 \therefore a \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

(84) $\begin{cases} x + ay = 1 \dots (1) \\ x - y = 2 \dots (2) \end{cases}$

CONDICIÓN: $x > 0 \wedge y > 0$

$$\cdot (1) - (2): (a+1)y = -1 \rightarrow y = \frac{-1}{a+1}$$

DE AQUÍ: $\frac{-1}{2+1} > 0 \rightarrow \frac{1}{2+1} < 0$

$\rightarrow 2+1 < 0 \rightarrow 2 < -1 \quad (\alpha)$

DE (2): $x - \frac{-1}{2+1} = 2 \rightarrow x = 2 - \frac{1}{2+1}$

DE AQUÍ: $2 - \frac{1}{2+1} > 0 \rightarrow \frac{22+1}{2+1} > 0$

$\rightarrow 2 < -1 \vee 2 > -\frac{1}{2} \quad (\beta)$

$(\alpha) \cap (\beta): 2 < -1 \text{ ó } 2 \in (-\infty; -\frac{1}{2})$

$\Delta x = \begin{vmatrix} m-1 & (m+1)^2 \\ m+1 & m-1 \end{vmatrix}$
 $= (m-1)^2 - (m+1)^2$

$\rightarrow \Delta x = -m^2 - 2m^2 - 5m$

$\Delta y = \begin{vmatrix} m^2-1 & m-1 \\ m+1 & m+1 \end{vmatrix}$
 $= (m^2-1)(m+1) - (m^2-1)$

$\rightarrow \Delta y = (m^2-1)m = m^3 - m$

$(*) \Delta_s + \Delta x + \Delta y = -6m^2 - 10m$
 $= -2m(3m+5)$

$\rightarrow (I) \text{ ES V}$

(85) Si $x = -2$ y $y = 5$ es solución del sistema dado, entonces, dichos valores satisfacen al sistema:

ME: $(2a+b)(-2) + (2-b)(5) = 42$

DE AQUÍ: $32 - 7b = 42 \dots (\alpha)$

$\rightarrow (22+b)(-2) + (32-2b)(5) = 113$

DE AQUÍ: $112 - 12b = 113 \dots (\beta)$

$\cdot II(\alpha) - 3(\beta): 332 - 77b = 462$
 $332 - 36b = 332 \quad (-)$

RESTANDO: $-41b = 123 \rightarrow b = -3$

EN $(\alpha): 32 + 21 = 42 \rightarrow a = 7$

$\therefore a+b = 4$

$(*)$ COMO $x = \frac{\Delta x}{\Delta_s} \wedge y = \frac{\Delta y}{\Delta_s}$

$\rightarrow$ PARA $m=0$, SE TIENE:

$x = \frac{0}{0} \wedge y = \frac{0}{0}$

EL SISTEMA ES COMPATIBLE INDETERMINADO $\rightarrow (II) \text{ ES F}$

$(***)$ PARA $m=-1$, SE TIENE:

$x = \frac{4}{0} \rightarrow$ NO EXISTE "X"

EL SISTEMA ES INCOMPATIBLE

$\rightarrow (III) \text{ ES F}$

$\therefore$ SÓLO (I) ES CORRECTO

(86) $\begin{cases} (m^2-1)x + (m+1)^2y = m-1 \\ (m+1)x + (m-1)y = m+1 \end{cases}$

$\Delta_s = \begin{vmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 \\ m+1 & m-1 \end{vmatrix}$
 $= (m^2-1)(m-1) - (m+1)^3$
 $= (m+1)[(m-1)^2 - (m+1)^2]$
 $= (-4m)$

$\rightarrow \Delta_s = -4m(m+1) = -4m^2 - 4m$

(87) $\begin{cases} 2x - y = 2 - a \\ 2x - (2+1)y = 2 \end{cases} ; a \in \mathbb{R}$

$(*)$ SI $a=1 \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \rightarrow x - y = 1 \end{cases}$

Obs: Son ecuaciones dependientes, lo que hay es "una ecuación con dos incógnitas"

$\rightarrow$ EL SIST. ES COMP. INDETERMINADO

$\rightarrow (I) \text{ ES V}$

(*) Si $\Delta = -2 \rightarrow \begin{cases} -2x - y = 4 + 2x + y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

OBSÉRVESE: $4 = -2$ ¡ABSURDO!

$\Rightarrow$ EL SIST. ES INCOMPATIBLE

$\Rightarrow$ (II) ES V

(***) POR LO ANTERIOR, SI $\Delta = -2 \neq 0$

EL SISTEMA NO ES COMPATIBLE.

$\Rightarrow$ (III) ES F

$\therefore$ (I) y (II) SON CORRECTOS

2° DEJAJA 6 LITROS EN 1 HORA.

1° CASO

$\frac{2}{1}b$	} 1h
$\frac{16}{5}$	
$\frac{16}{5}$	} $2\frac{1}{5}h < \frac{16}{5}h$

2° CASO

$\frac{2}{1}b$	} 1h
$\frac{16}{4}$	
$\frac{16}{4}$	} $2\frac{3}{4}h < \frac{16}{4}h$

PER SERVOLUMENES IGUALES:

$\frac{16}{5} = \frac{16}{4} \rightarrow \Delta = 5K$
 $\Delta = 5K \rightarrow b = 4K$

VOLUMEN TOTAL: $9K + 11K = 20K$

LUGAR: $\begin{cases} 1^\circ \text{ DEMORA: } 4h \\ 2^\circ \text{ DEMORA: } 5h \end{cases}$

88) DADO EL SISTEMA

$$\begin{cases} (m+1)x - 3y = 2m \\ 4x - my = m+3 \end{cases}$$

(i) SERÁ COMPATIBLE INDETERMINADO,

Si $\frac{m+1}{4} = \frac{-3}{-m} = \frac{2m}{m+3}$

(1) (2) (3)

DE (1) = (2): $m^2 + m - 12 = 0$

$(m+4)(m-3) = 0$

$m = -4 \vee m = 3$

$\times \quad \checkmark$

OBS: $m = -4$ NO VERIFICA QUE (2) = (3)

$\Rightarrow m = 3 = K_1$

(ii) SERÁ INCOMPATIBLE, SI

$\frac{m+1}{4} = \frac{-3}{-m} \neq \frac{2m}{m+3}$

(1) (2) (3)

DE (1) = (2): $m = -4 \vee m = 3$

$\checkmark \quad \times$

OBS: $m = 3$ NO VERIFICA QUE (2) $\neq$ (3)

$\Rightarrow m = -4 = K_2$

$\therefore J = 2(3) + 3(-4) = -6$

89) RECUERDE

EL SISTEMA $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

ES INCONSISTENTE, SI

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

EN EL PROBLEMA:

$\frac{K+1}{K^2} = \frac{2}{-(K-2)} \neq \frac{3}{4}$

(1) (2) (3)

DE (1) = (2): $3K^2 - K - 2 = 0$

$(3K+2)(K-1) = 0$

$K = -\frac{2}{3} \vee K = 1$

$\times \quad \checkmark$

NOTA: EL ÚNICO VALOR QUE VERIFICA QUE (2) $\neq$ (3) ES: $K = 1$.

91) $A + B = 80000 \dots (1)$

$+ 10\%A + 12\%B = 9000$

DE AQUÍ: $10A + 12B = 900000$

92) 1° DEJAJA 2 LITROS EN 1 HORA

DIVIDIENDO ENTRE 10:

$$A + 1,2B = 50000 \dots (2)$$

RESTANDO (2) - (1):

$$0,2B = 10000$$

DE AQUÍ: $B = 50000$

(IMPUESTO AL 12%)

$$+ A = 30000$$

(IMPUESTO AL 10%)

$$(92) \quad x + y + 2z = 3 \dots (1)$$

$$x + 2y - z = 1 \dots (2)$$

$$by + z = 2 \dots (3)$$

$$(2) - (1): y - 3z = -2 \dots (4)$$

EL SISTEMA ORIGINAL TENDRÁ INFI-

NITAS SOLUCIONES, SI EL SISTEMA

(*) TAMBIÉN TIENE INFINITAS SOLU-

CIONES. PARA ESTO, SE DEBE CUM-

PLIR: $\frac{b}{1} = \frac{1}{-3} = \frac{2}{-2}$

$$\text{DE AQUÍ: } b = -\frac{1}{3} \wedge 2 = \frac{2}{3}$$

$$\Delta A = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\} \therefore n(A) = 1$$

(93) MULTIPLICAMOS LAS ECUACIONES

DADAS POR C, b y a RESPECTIVA-

MENTE, SE OBTENDRÁ:

$$bcx + acy = c^2 \dots (1)$$

$$bcx + abz = b^2 \dots (2)$$

$$acy + abz = a^2 \dots (3)$$

$$[(1) + (2)] - (3):$$

$$2bcx = c^2 + b^2 - a^2$$

$$\therefore x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$(94) \quad 2x + y + 3z = 3 \dots (1)$$

$$x - y - 2z = 22 \dots (2)$$

$$x + 2y + 2z = 42 \dots (3)$$

$$x + y + z = 3 \dots (4)$$

$$(2) + (3): 2x + y = 62$$

$$\text{EN (1): } 62 + 3z = 3 \rightarrow z = 1 - 22$$

$$(1) + (3): 3(x + y) + 5z = 42 + 3$$

$$\rightarrow 3(x + y) + 5 - 10z = 42 + 3$$

$$x + y = \frac{142 - 2}{3}$$

$$\text{EN (4): } \frac{142 - 2}{3} + 1 - 22 = 3$$

$$142 - 2 + 3 - 62 = 9 \rightarrow 2 = 1$$

$$\text{OBTENIENDO: } z = -1 \wedge x + y = 4$$

$$\text{EN (2): } x - y = 0$$

$$\text{RESOLVIENDO (*): } x = y = 2$$

$$\therefore xyz = 2 = (2)(2)(1)(1) = 4$$

$$(95) \quad \begin{cases} (1-m)x + y - z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ x - y - (1-m)z = 0 \end{cases}$$

EL SISTEMA HOMOGÉNEO TENDRÁ

SOLUCIONES DIFERENTES A LA TRI-

VIAL, SI $\Delta_S = 0$

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & -1 \\ 2 & -m & -2 \\ 1 & -1 & m-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow m(m-1)^2 + 2 - 2 - m - 2(1-m) - 2(m-1) = 0$$

$$\rightarrow \frac{m}{m} [(m-1)^2 - 1] = 0$$

$$m[(m-1)^2 - 1] = 0$$

$$m(m-1)(m-1-1) = 0$$

$$m^2(m-2) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } m = 0 \vee m = 2$$

06) EL SISTEMA DADO ES EQUIVALENTE

TEA: $x - 3y + z = 1 \dots (1)$

$-x - 2y + z = 0 \dots (2)$

$x - 2y - 2z = 4 \dots (3)$

• (1) + (2) + (3): $x - 7y = 5 \dots (4)$

• (1) - (2): $2x - y = 1 \dots (5)$

• (5) - 2(4): $2x - y = 1$
 $2x - 14y = 10 \dots (-)$

RESTANDO: $13y = -9 \rightarrow y = -\frac{9}{13}$

EN (5): $2x = 1 - \frac{9}{13} \rightarrow x = \frac{2}{13}$

EN (1): $\frac{2}{13} - \frac{27}{13} + z = 1 \rightarrow z = -\frac{16}{13}$

• $E = \frac{2}{13} - \frac{9}{13} + \frac{16}{13} = \frac{1}{13}$

NOTA: VERIFIQUELO POR CRAMER.

07)
$$\begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 4x - 3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 21z = 0 \end{cases}$$

OBJ: EL SISTEMA ES LINEAL HOMOGÉNEO, ENTONCES, UNA SOLUCIÓN

ES: $x = y = z = 0$

CON ESTO: (II) ES F.

• SÓLO NOS CABE ANALIZAR EL Δ_s .

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -9 \\ 4 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 21 \end{vmatrix}$$

CALCULANDO, SE TIENE: $\Delta_s = 0$
 CON ESTO, EL SISTEMA ES COMPATIBLE INDETERMINADO.

• (I) ES F $\wedge$ (III) ES V

• $\therefore$ SÓLO (III) ES CORRECTO

08) DE (1): $x + y = (2-b)(2-b) \rightarrow x =$

DE (2): $x - z = (2-b)(2-b) \rightarrow x =$

OBJ: $x + y = x - z \rightarrow y + z = 0 \dots (A)$

EN (3): $\frac{(2-b)(2-b)}{z-y} = \frac{2-b}{2-b}$

DE AQUÍ: $z - y = (2-b)^2 \dots (B)$

(A) + (B): $2z = (2-b)^2 \therefore z = \frac{(2-b)^2}{2}$

09) $\frac{5}{2x+y} + \frac{4}{2x-3y} = 5 \dots (1)$

$\frac{15}{2x+y} + \frac{2}{2x-3y} = 5 \dots (2)$

(1) - (2):

$-\frac{10}{2x+y} + \frac{2}{2x-3y} = 0 \rightarrow \frac{2}{2x-3y} = \frac{10}{2x+y}$
 (I)

EN (2): $\frac{25}{2x+y} = 5 \rightarrow 2x+y = 5 \dots (A)$

(A) EN (I): $\rightarrow 2x-3y = 1 \dots (B)$

RESOLVIENDO: $x = 2 = x_0$; $y = 1 = y_0$
 $\therefore 4x_0 + 9y_0 = \frac{1}{5}$

100) DE $x + y = \frac{1}{15} \rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{15}$

DE DOBLANDO: $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{15} \dots (1)$

EN FORMA SIMILAR: $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{120} \dots (2)$

$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{120} \dots (3)$

(2) + (3) - (1): $2\left(\frac{1}{xy}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$

DE AQUÍ: $xy = 15 \dots (\alpha)$

$f_1(2): \frac{1}{yz} = \frac{1}{15} - \frac{1}{40} = \frac{1}{40}$

$\leadsto yz = 40 \dots (\beta)$

$f_1(1): \frac{1}{xz} = \frac{1}{15} - \frac{1}{40} = \frac{1}{24}$

$\leadsto xz = 24 \dots (\theta)$

$\cdot \frac{(\alpha) \times (\beta)}{(\theta)}: y^2 = \frac{15 \times 40}{24} \rightarrow y = 5 \in \mathbb{R}^+$

$f_1(\alpha)y(\beta): x = 3 \wedge z = 8$

$\therefore x + y + z = 16$

(101) DEL SISTEMADO:

$x + y = 6 \dots (1)$

$y + z = 2 \dots (2)$

$z + x = 14 \dots (3)$

$\cdot [(1) + (2) - (3)]: 2y = 6 + 2 - 14$

$\rightarrow y = -3$

$\therefore x + z - y = 14 - (-3) = 17$

(102) DE $\frac{xy}{5x+4y} = 6 \rightarrow \frac{5x+4y}{xy} = \frac{1}{6}$

DESDOBLANDO: $\frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{6} \dots (1)$

EN FORMA SIMILAR CON LAS OTRAS:

2 ECUACIONES:

$\frac{3}{z} + \frac{2}{x} = \frac{1}{8} \dots (2); \frac{2}{z} + \frac{5}{y} = \frac{1}{6} \dots (3)$

$\cdot [(1) + (2)] - (3): \frac{6}{x} = \frac{1}{8} \rightarrow x = 48 = x_0$

$f_1(1): \frac{5}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \rightarrow y = 60 = y_0$

$f_1(2): \frac{3}{z} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \rightarrow z = 36 = z_0$

$\therefore T = \frac{2(60)}{48-36} = \frac{10}{3}$

(103) APLICUEMOS EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \cdot f_2 + f_1 \\ \cdot f_4 - f_3 \\ \cdot 3f_3 \sim \\ \cdot f_5 - f_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 3 \end{array} \right]$$

$$\cdot f_3 - f_2 \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 3 \end{array} \right]$$

$$\cdot 7f_4 + 2f_3 \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 3 \end{array} \right]$$

$$\cdot f_5 - 2f_4 \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -49 & 0 & -11 \end{array} \right]$$

DES: DE LA ÚLTIMA FILA, SE TIENE:

$-49x_4 = -11 \therefore x_4 = \frac{11}{49}$

(104) SEGÚN LAS CONDICIONES, EL SISTEMA ES DE LA FORMA SIGTE.:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = b_1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = b_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_n = b_3 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = b_n \end{cases}$$

Por MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & b_n \end{array} \right]$$

RESTAMOS f_1 A TODAS LAS DEMÁS FILAS:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_3 - b_1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & b_4 - b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & b_{n-1} - b_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_n - b_1 \end{array} \right]$$

SUMAMOS f_1 A TODAS LAS DEMÁS FILAS:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A - (n-1)b_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_3 - b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & b_{n-1} - b_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_n - b_1 \end{array} \right]$$

ONDE: $A = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$

DE LA 1ª FILA:

$$(n-1)x_1 = A - (n-1)b_1 \rightarrow x_1 = \frac{A - (n-1)b_1}{n-1}$$

DE LA 2ª FILA:

$$x_1 - x_2 = b_2 - b_1 \rightarrow x_2 = \boxed{x_1} + b_1 - b_2$$

DE LA 3ª FILA:

$$x_1 - x_3 = b_3 - b_1 \rightarrow x_3 = \boxed{x_1} + b_1 - b_3$$

DE LA nª FILA:

$$x_1 - x_n = b_n - b_1 \rightarrow x_n = \boxed{x_1} + b_1 - b_n$$

CONSEJO: (I) ES V; (II) y (III) SON F.

∴ SÓLO (I) ES CORRECTO

(105) $x + y = 12 \dots (1)$; $x^2 + y^2 = 144 \dots (2)$

DE (1): $y = 12 - x$

EN (2): $x^2 + (12 - x)^2 = 144$

$\rightarrow 2x^2 - 24x + (144 - 144) = 0$

DE AQUÍ: $x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(2)(144 - 144)}}{4}$

COMO $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0$

$\Rightarrow 576 - 8(144 - 144) \geq 0$

$\rightarrow 144 - 144 \leq 72 \rightarrow 144 \leq 72$

∴ $144 = 72$

(106) $\begin{cases} x^5 - y^5 = 992 \dots (1) \\ x - y = 2 \dots (2) \end{cases}$

SEA $x = a + b$ e $y = a - b$

EN (2): $2b = 2 \rightarrow b = 1$

EN (1): $(a+1)^5 - (a-1)^5 = 992$

$\rightarrow 5a^4 + 10a^2 + 10a^2 + 5a + 1 - (-5a^4 + 10a^2 - 10a^2 - 5a + 1) = 992$

$\rightarrow 10a^4 + 20a^2 - 990 = 0$

$a^4 + 2a^2 - 99 = 0$

$$(a^2+1)(a^2-9)=0$$

$$\downarrow a^2 = -1 \rightarrow a \notin \mathbb{R} \quad (x, y \notin \mathbb{R})$$

$$\downarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \text{ ó } -3$$

$$\bullet \text{ Si } a = 3 \wedge b = 1 \rightarrow x = 4; y = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a = -3 \wedge b = 1 \rightarrow x = -2; y = -4$$

$$\therefore \# \text{ DE SOLUCIONES REALES: } 2$$

$$(107) \text{ DE (1): } x^2 - y^2 - x + y = 0$$

$$(x+y)(x-y) - (x-y) = 0$$

$$\rightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$$

$$\text{DE AQUÍ: } x = y \vee x + y = 1$$

$$\bullet \text{ Si } x = y, \text{ EN (2): } y^2 + y - 2 = 0$$

$$\rightarrow (y+2)(y-1) = 0 \rightarrow y = -2 \vee y = 1$$

$$\text{LUEGO: } \downarrow y = -2 \rightarrow x = -2 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

$$\downarrow y = 1 \rightarrow x = 1 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

NOTA: PARA $x+y=1$ NO HAY SOLUCIÓN ENTERA PARA x Y y (VERIFÍQUE).

$\therefore$ SUMA DE SOLUCIONES ENTERAS:

$$-2 - 2 + 1 + x = -2$$

$$(108) \quad x^2 + xy + y^2 = 13 \dots (1)$$

$$x + y = 4 \dots (2)$$

$$\bullet (2)^2: x^2 + 2xy + y^2 = 16$$

$$13 - xy + 2xy = 16$$

$$\text{DE AQUÍ: } xy = 3$$

$$\text{ADEMÁS: } x + y = 4 \quad (*)$$

$$\text{DE } (*): x = 3 \wedge y = 1$$

$$\vee$$

$$x = 1 \wedge y = 3$$

PARA EL PRIMER CASO:

$$T = x + 3y = 3 + 3(1) = 6$$

$$(109) \quad x^2 - xy + y^2 = 3 \dots (1)$$

$$2x^2 - xy - y^2 = 5 \dots (2)$$

$$\bullet (1) \times 5: 5x^2 - 5xy + 5y^2 = 15$$

$$\bullet (2) \times 3: 6x^2 - 3xy - 3y^2 = 15$$

$$\text{RESTANDO: } x^2 + 2xy - 8y^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} x \quad 4y \\ \times \quad -2y \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow (x+4y)(x-2y) = 0$$

$$\rightarrow x = -4y \vee x = 2y$$

$$\bullet \text{ Si } x = -4y, \text{ EN (1): } 16y^2 + 4y^2 + y^2 = 3$$

$$\rightarrow y^2 = \frac{1}{7} \rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{7}} \notin \mathbb{Q}$$

(NO HAY SOL. RACIONAL)

$$\bullet \text{ Si } x = 2y, \text{ EN (1): } 4y^2 - 2y^2 + y^2 = 3$$

$$\rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

$$\downarrow \text{ SI } y = 1 \rightarrow x = 2 \text{ (UNA SOL. RAC.)}$$

$$\downarrow \text{ SI } y = -1 \rightarrow x = -2 \text{ (OTRA SOL. RAC.)}$$

$$\therefore \# \text{ DE SOL. RACIONALES: } 2$$

(110) ORDENANDO LA 1ª ECUACIÓN; ASÍ:

$$x^2 + x^2(y+1) + xy + x + y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$x^2(x+y+1) + x(y+1) + (y+1)^2 = 0$$

$$(y+1)(x+y+1)$$

$$(x+y+1)(x^2+y+1) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } x+y+1 = 0 \rightarrow x+y = -1 \quad (*)$$

$$\text{PERO DE LA 2ª EC.: } 2x+y = 2$$

$$\text{RESOLVIENDO } (*): x = 3; y = -4$$

$$\therefore T = x - 2y^2 = 3 - 2(-4)^2 = -13$$

NOTA: PARA EL CASO $x^2 + y + 1 = 0$,

SE TIENE $x, y \notin \mathbb{R}$

(111) DE LA 2ª ECUACIÓN:

$$\text{SEA } \sqrt{x^2 + xy + 4} = a; (a > 0)$$

DE AHÍ: $x^2 + xy = 2^2 - 4$

DE LA 2ª EC.: $2^2 - 4 + 3 = 52$

$\rightarrow 2^2 + 3 - 56 = 0 \rightarrow (2+8)(2-7) = 0$

$\rightarrow 2 = -8 \vee 2 = 7 \quad (2 > 0)$

OSEA QUE: $x^2 + xy = 45 \dots (*)$

DE LA 1ª EC. (PREVIA CORRECCIÓN)

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - y^2})^2 + (x - \sqrt{x^2 - y^2})^2}{x^2 - (x^2 - y^2)} = \frac{17}{4}$$

$$\frac{2(x^2 + x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{17}{4}$$

DE AHÍ: $y^2 = \frac{16}{25}x^2 \rightarrow y = \pm \frac{4}{5}x$

• Si $y = \frac{4}{5}x$; EN (*): $x^2 + \frac{4}{5}x^2 = 45$

$\rightarrow 9x^2 = 5 \times 45 \rightarrow x = \pm 5$

• SI $x = 5 \rightarrow y = 4$ (UNA SOLUCIÓN)

• SI $x = -5 \rightarrow y = -4$ (OTRA SOLUCIÓN)

• Si $y = -\frac{4}{5}x$; EN (*): $x^2 - \frac{4}{5}x^2 = 45$

$\rightarrow x^2 = 5 \times 45 \rightarrow x = \pm 15$

• SI $x = 15 \rightarrow y = -12$ (OTRA SOL. MÁS)

• SI $x = -15 \rightarrow y = 12$ (OTRA MÁS)

ALGUNO: # DE SOL. REALES: 4

CON ESTO: SÓLO (I) ES CORRECTO

• (1) + (2): $\frac{2}{(xy)^{1/2}} = 1 \rightarrow x - y = 4$

• (2) - (1): $\frac{2}{(xy)^{1/2}} = \frac{8}{7} \rightarrow x - y = 40$

RESOLVIENDO (*): $x = \frac{53}{2}x_0$; $y = \frac{45}{2}y_0$

$\therefore 4x_0 - 2y_0 = 106 - 45 = 61$

(113) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DE AHÍ: $x^2 + y^2 + z^2 = 88 \dots (1)$

$x^2 + y^2 + z^2 = 50 \dots (2)$

$x + y + z = 0 \dots (3)$

APLIQUEMOS PRODUCTOS NOTABLES.

SE SABE QUE: SI $x + y + z = 0$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$

OSEA QUE: $2(x^2 + y^2 + z^2) = (50)^2$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1250$

(14) $a = \frac{x^2 - y}{1 - xy}$; $b = \frac{y^2 - x}{1 - xy}$

APLIQUEMOS PROPIEDAD DE PROPORCIONES EN (1) y (2):

$$\begin{aligned} * \frac{a-1}{1} &= \frac{x^2 - y - 1 + xy}{1 - xy} \\ &= \frac{(x+1)(x-1) + y(x-1)}{1 - xy} \end{aligned}$$

$\Rightarrow a-1 = \frac{(x-1)(x+1+y)}{1 - xy} \dots (*)$

ANÁLOGAMENTE EN (2):

(112) DE LA 1ª ECUACIÓN:

$$\frac{(x+y)^{1/2} - (x-y)^{1/2}}{14} = \frac{5}{14} \frac{(x+y)^{1/2} - (x-y)^{1/2}}{14}$$

$$\frac{(x+y)^{1/2} - (x-y)^{1/2}}{(x+y)^{1/2} (x-y)^{1/2}} = \frac{5}{14}$$

DESARROLLANDO y CANCELANDO:

$$\frac{1}{(x-y)^{1/2}} - \frac{1}{(x+y)^{1/2}} = \frac{5}{14} \dots (1)$$

$$\frac{1}{(x+y)^{1/2}} + \frac{1}{(x-y)^{1/2}} = \frac{9}{14} \dots (2)$$

$$b-1 = \frac{(y-1)(x+y+1)}{1-xy} \dots (\varphi)$$

$$(\alpha) \div (\varphi): \frac{a-1}{b-1} = \frac{x-1}{y-1} \dots (\theta)$$

DE (2): $b - bxy = y^2 - x$
 $b - y^2 = (by-1)x$
 $\hookrightarrow x = \frac{b-y^2}{by-1}$

• X EN (θ):
 $\frac{a-1}{b-1} = \frac{b-y^2}{by-1} - 1$

$$\frac{a-1}{b-1} = \frac{b-y^2-by+1}{(by-1)(y-1)} \quad \text{FACTORIZA}$$

$$\frac{a-1}{b-1} = \frac{-(y-1)(y+1+b)}{(by-1)(y-1)}$$

$$\rightarrow (ab-b)y + x - a = (1-b)y + x - b^2$$

$$\rightarrow (ab-1)y = a-b^2$$

$$\therefore y = \frac{a-b^2}{ab-1}$$

(16) DE LA 1ª EC.: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 5$

$$\rightarrow \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = 5 \rightarrow x^3 y^3 z^3 = 5^3 \dots (\alpha)$$

EN FORMA SIMILAR, DE LA 2ª y 3ª ECUACIÓN:

$$y^3 z^3 x^3 = 27^3 \dots (\beta); \quad z^3 x^3 y^3 = 64^3 \dots (\theta)$$

$$\bullet (\alpha)^3 \div [(\beta)(\theta)]:$$

$$\frac{x^{12} y^{12} z^{12}}{x^6 y^6 z^6} = \frac{8^3}{27^3 \cdot 64^3}$$

• SACO $\sqrt[3]{}$: $x^2 = \frac{8^4}{27 \cdot 64} = \frac{64}{27}$

• SACO $\sqrt[3]{}$: $x = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ ó $x = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

(17) $z^x = y^{2x} \dots (1)$

$$2^z = 2(4^x) \dots (2)$$

$$x+y+z = 16 \dots (3); \quad x, y, z \in \mathbb{R}^+$$

DE (1): $z^x = (y^2)^x \rightarrow z = y^2$

DE (2): $2^z = 2^{1+2x} \rightarrow z = 1+2x$

OBJ: $y^2 = 1+2x \rightarrow x = \frac{y^2-1}{2}$

EN (3): $\frac{y^2-1}{2} + y + y^2 = 16$

DE AQUÍ: $3y^2 + 2y - 33 = 0$

$$3y^2 + 2y - 33 = 0$$

$$\hookrightarrow (3y+11)(y-3) = 0$$

$$\rightarrow y = -\frac{11}{3} \vee y = 3 \quad \begin{matrix} \nearrow x=4 \\ \searrow z=9 \end{matrix}$$

LUEGO, EN LO PEDIDO:

$$T = \text{antilog}_2 + 3 \log_3 + \log_4 (\log_3)$$

$$= 3^2 - 3 \log_3 3 + \log_2 2$$

$$= 9 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \therefore T = 8$$

$$\therefore T = xy = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\therefore T = xy = 9 \cdot 4 = 36$$

(18) DEL SISTEMA $x, y \in \mathbb{R}^+$

DE $x^2 + y\sqrt{xy} = 70 \dots (\alpha)$

$$\hookrightarrow \sqrt{x}(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) = 70 \dots (1)$$

DE $x\sqrt{xy} + y^2 = 105$

$$\hookrightarrow \sqrt{y}(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) = 105 \dots (2)$$

$$(1) \div (2): \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{70}{105} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{y}$$

$$\text{O TAMBIÉN: } x = \frac{4}{9}y$$

EN (α): $\frac{16}{81}y^2 + \frac{2}{3}y^2 = 70 \rightarrow 10y^2 = 70$

$$\rightarrow y^2 = 81 \rightarrow y = 9 > 0$$

$$\text{LUEGO: } x = \frac{4}{9}(9) \rightarrow x = 4$$

$$\therefore T = xy = 9 \cdot 4 = 36$$

JOHN NEPER (1550 - 1617)



John Neper, publica la obra "Canonis mirifici logarithmorum descriptio" y en ella las primeras tablas de logaritmos de funciones trigonométricas.

KARL FRIEDRICH GAUSS



Karl Friedrich Gauss hizo sus primeros descubrimientos en álgebra siendo muy joven, advirtiendo la relación entre la búsqueda de raíces de la ecuación $x^n - 1 = 0$ y la división de la circunferencia en partes iguales.

ALGEBRA

SEXTO SEMINARIO TALLER DE ÁLGEBRA

PRE-UNI 2005-II

CONTIENE:

- ⑥ **INECUACIONES**
- GRÁFICAS
- ⑥ **SUCESIONES Y SERIES**
- ⑥ **PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y
GEOMÉTRICA**
- ⑥ **FACTORIAL**
- ⑥ **ANÁLISIS COMBINATORIO**
- ⑥ **BINOMIO DE NEWTON**

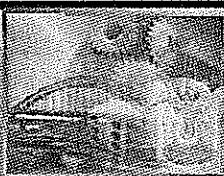


LIMA - PERÚ.

6^{to} SEMINARIO - TALLER

ALGEBRA

CICLO PRE-UNI 2005-II



01. Indique el número de soluciones naturales del sistema:

$$x + 2y < 5$$

$$x - y < 3$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

02. Resolver en $\mathbb{Z}$, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y < 20 \\ 2x - y < 2 \\ 3x - y > 3 \end{cases}$$

$$2x - y < 2$$

$$3x - y > 3$$

y determine el valor de $T = 5x - 3y$

A) 3

B) 2

C) 0

D) 4

E) 7

03. Sean x, y números enteros. Al resolver el sistema

$$3x - 4y > 10$$

$$x + 2y < -12$$

$$y > -6$$

Determine $T = x + y$

A) -5

B) -8

C) -10

D) 0

E) 2

04. Un escolar encola de nuevo todos sus sellos en otro álbum similar. Si pega 20 sellos en cada hoja entonces no le alcanza el álbum, si pega 23 sellos, le sobrarán por lo menos, una hoja vacía y si al escolar se le regala igual álbum con 21 sellos en cada hoja, el escolar tendrá en total 500 sellos. ¿Cuántas hojas tiene el álbum?

A) 18

B) 15

C) 14

D) 13

E) 12

05. Resuelva el sistema lineal de

$$\begin{cases} x + y + z \leq 6 \\ x + y \geq 3 \\ y + z \geq 5 \\ x + z \geq 4 \\ x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

$$x + y \geq 3$$

$$y + z \geq 5$$

$$x + z \geq 4$$

$$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$$

inecuaciones:

Indique el valor de $T = x \cdot y \cdot z$.

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14

06. Determine el valor de $E = \frac{x+y}{z}$, en el siguiente sistema de inecuaciones lineales.

$$z - 1 < x + y < z + 1$$

$$z - 7 < x - y < z - 5$$

$$10 < x + z < 12; x, y, z \in \mathbb{Z}^+$$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{3}$

C) 2

D) 1

E) 3

07. Determine el conjunto solución de:

$$\begin{cases} \log_{1/2}(5x - 12) < -3 \\ 8 < 2^x < 32 \end{cases}$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

$$8 < 2^x < 32$$

A) $(4, \infty)$

B) $(3, \infty)$

C) $(3, 4)$

D) $(4, 5)$

E) $(5, \infty)$

08. Determine el mayor valor que toma " $x + y$ " al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y - x^2 + 6x - 12 \geq 0 \\ 2y - x \leq 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

$$2y - x \leq 4$$

A) 8

B) 6

C) -7

D) 9

E) 0

09. Al resolver:

$$\log x^2 > \log x^2 - 1$$

$$\ln x^7 < \ln x^3 - 1$$

El conjunto solución de este sistema es: (a, b) , determine $T = 10a + b$.

A) 2

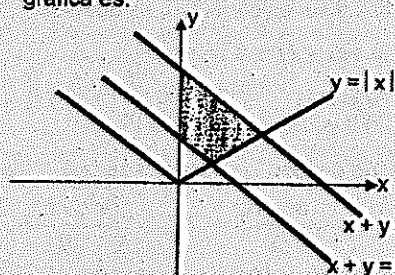
B) 3

C) 8

D) 10

E) 15

10. Indique el sistema cuya solución grafica es:



A) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ y < x^2; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ y \geq x^2; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ y \geq |x|; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ y < |x|; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

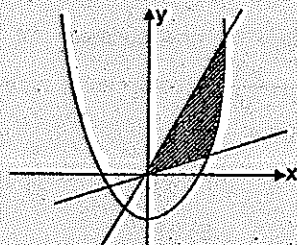
E) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \geq 3 \\ y \leq |x|; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

11. Dados los conjuntos:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y/4 \leq x/2 \leq y\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y < (x-1)(x+1)\}$$

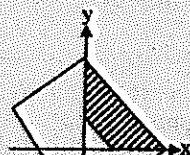
La región sombreada corresponde a:



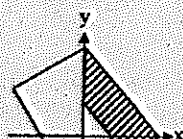
- A) $(A \cap B)^c$ B) $A \cap B$ C) $A \cup B$
D) $A - B$ E) $B - A$

12. Determine la solución del sistema:

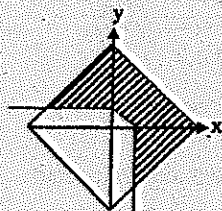
$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 4 \\ x + |x| + y + |y| \geq 2 \end{cases}$$



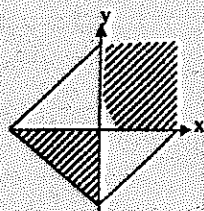
A)



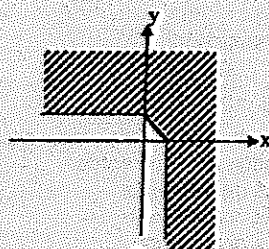
B)



C)



D)



E)

13. Determine el valor del área definida por $A = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 \leq 9 \wedge |x| + |y| \geq 3\}$

A) $5(\pi - 2)u^2$

B) $7(\pi - 1)u^2$

C) $8(\pi - 2)u^2$

D) $9(\pi - 2)u^2$

E) $6\pi u^2$

14. En la sucesión

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{11}{25}, \frac{31}{125}, \frac{89}{625}, \dots \right\} \text{ el}$$

término de lugar 5 es:

- A) $\frac{240}{5^5}$ B) $\frac{247}{5^5}$ C) $\frac{250}{5^5}$
D) $\frac{259}{5^5}$ E) $\frac{260}{5^5}$

15. Si $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 10^{-1}a_n$, $\forall n \geq 1$, determine el término enésimo.

- A) $10^{-(n-1)}$ B) $10^{-(n+2)}$ C) $10^{-(n+1)}$
D) 10^n E) 10^{-n}

16. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos

I. $\{a_n\}$ es creciente, $a_1 = \sqrt{2}$,

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}}, n \geq 2$$

II. $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ es decreciente

III. $\left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\}$ es una sucesión acotada

- A) solo II B) I y II C) I y III
D) I, II y III E) solo III

17. Sea la sucesión:

$$\left\{ \frac{1}{5}, \frac{7}{25}, \frac{37}{125}, \frac{175}{625}, \dots \right\}$$

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

- I. Es decreciente
II. Es convergente
III. Es divergente

- A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

18. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que

$$a_n = \sqrt{4 + \frac{9}{n} + \frac{12}{\sqrt{n}}}$$

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente

II. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.

$$\text{III. } |a_n - 2| < 4 \Rightarrow n > \frac{9}{16}$$

- A) solo II B) solo I C) I y II
D) II y III E) I, II y III

19. Se definen las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ y } b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$$

$$a_1 = a, b_1 = b, 0 < a < b$$

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

- I. $\{a_n\}$ es creciente.
II. $\{b_n\}$ es decreciente.
III. $\forall n: a_n > b_n$.
IV. $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen hacia un mismo punto.

- A) solo IV B) solo III C) I, II y IV
D) solo I E) solo II

20. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

- I. Si $\{a_n\}/a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ entonces $\{a_n\}$ es decreciente y acotada.
II. Si $\{a_n\}$ es tal que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

III. Si $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

- A) solo II B) I y II C) II y III
D) solo I E) solo III

21. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{2^n + 3^{n+3}}$$

entonces la sucesión converge a:

- A) $\frac{1}{81}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{82}$
D) $\frac{1}{84}$ E) 81

22. A qué valor converge la siguiente

$$\text{sucesión } \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{4}{3}\right)^4, \left(\frac{5}{4}\right)^5, \dots \right\}$$

- A) 0 B) 1 C) e
D) e^3 E) e^6

23. Determine el valor de convergencia de

$$\text{la sucesión: } \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

- A) e^{-6} B) e^{-3} C) e^{-1}
D) e^2 E) e^3

24. Se define la sucesión S, por:

$$S = \left\{ \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n \right\}_{n \geq 1}; \text{ la sucesión}$$

converge al valor de:

- A) 1 B) e^{-1} C) e^{-2}
D) e E) 1

25. Sea la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definida por

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, con relación a esta sucesión podemos decir que converge hacia:

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

26. Calcule el valor de convergencia de la

$$\text{sucesión } \left\{ \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{(2n+1)^2 (3n-1)^2} \right\}$$

- A) $\frac{1}{136}$ B) $\frac{2}{55}$ C) $\frac{1}{144}$
D) $\frac{5}{144}$ E) $\frac{9}{136}$

27. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión definida

$$\text{por: } \{a_n\} = \left\{ \frac{11}{30}, \frac{111}{300}, \frac{1111}{3000}, \dots \right\};$$

determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$.

- A) $\frac{10}{27}$ B) $\frac{15}{27}$ C) $\frac{17}{27}$
D) $\frac{21}{27}$ E) $\frac{41}{27}$

28. Determine el valor donde la sucesión es convergente.

$$\left\{ \frac{12}{4}, \frac{24}{7}, \frac{44}{12}, \frac{72}{19}, \dots \right\}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

29. Si la serie:

$$S = \frac{1}{a} + \frac{11}{a^2} + \frac{111}{a^3} + \frac{1111}{a^4} + \dots,$$

converge a $\frac{13}{36}$, determine el valor de "a".

- A) 18 B) 13 C) $\frac{10}{13}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

30. Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $x_1 = 3$

$$\text{y } x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}. \text{ Determine el valor}$$

de convergencia:

- A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3
D) 1 E) 5

31. Determine el valor de $E = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{4n^2 - 1}$

- A) $\frac{58}{101}$ B) $\frac{150}{101}$ C) $\frac{50}{101}$
D) $\frac{100}{101}$ E) $\frac{200}{101}$

32. Determine el valor de x en la igualdad

$$\sum_{n=2}^{100} \frac{nx - (n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{103}{202}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{99}{102}$ C) $\frac{102}{99}$
D) $\frac{34}{11}$ E) $\frac{3}{2}$

33. En la expresión siguiente encontrar el valor de la constante A.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = A \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$$

- A) $-\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

34. Calcule el valor de:

$$H = \sum_{i=4}^{13} \left\{ \sum_{k=1}^{64} (\sqrt{5k-1} - \sqrt{5k+4}) (2i-1) \right\}$$

- A) -906 B) -960 C) -988
D) -986 E) -976

35. Si: $\sum_{k=1}^{2n+1} \left(k + \sum_{r=1}^n (2r-1) \right) = (n+1)^3 + x$
determine el valor de x.

- A) 0 B) 1 C) n
D) n^2 E) n^3

36. Determine el valor de la suma finita:

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k^4 + 1 + k^3}{k + k^2}$$

- A) $200 - \frac{1}{21}$ B) $2071 - \frac{1}{21}$
C) $2871 - \frac{1}{21}$ D) $3000 - \frac{1}{31}$
E) $2801 - \frac{1}{21}$

37. Determine la suma finita

$$D = 3 + 10 + 29 + 66 + \dots + 1002$$

- A) 3045 B) 2025 C) 5025
D) 70025 E) 6025

38. Determine el valor de la suma:

$$E = \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{48 \times 50}$$

- A) $\frac{6}{25}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $\frac{8}{25}$
D) $\frac{11}{25}$ E) $\frac{21}{25}$

39. Determine la siguiente suma:

$$S = 1 + \frac{2}{9} + \frac{26}{3^6} + \frac{242}{3^{10}} + \dots$$

- A) $\frac{101}{80}$ B) $\frac{215}{73}$ C) $\frac{121}{80}$
D) $\frac{215}{101}$ E) $\frac{425}{80}$

40. Determine la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

41. Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^{k+2}$$

- A) $\left(\frac{1}{6} \right)^4 \frac{1}{5}$ B) $\left(\frac{2}{3} \right)^5 \frac{1}{6}$
C) $\left(\frac{1}{6} \right)^5 \left(\frac{1}{5} \right)$ D) $\left(\frac{3}{4} \right)^3 \left(\frac{1}{6} \right)^2$
E) $\left(\frac{1}{6} \right)^3 \frac{2}{5}$

42. Determine: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n^2+3n} \cdot 2^{-n}$

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

43. Determine la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

44. Determine la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

45. Halle el valor de la convergencia de la serie:

$$\sum_{k=5}^{\infty} 3^{k-4} \left(\frac{1}{6} \right)^{k-6}$$

- A) 14 B) 28 C) 18
D) 72 E) 36

46. Determine la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

47. Sea
- $\sum a_n$
- una serie de términos positivos que no cumple con la condición
- $a_n \rightarrow 0$
- .

Con respecto a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$

podemos afirmar:

- A) converge a 0 B) converge a 1
C) converge a 3 D) converge a $\frac{1}{2}$
E) es divergente

48. Determine el valor de convergencia de

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)5^{-k}$

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{5}{8}$ E) 1

49. Indique el valor de convergencia de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 3}{k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k}$$

- A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{4}{3}$ E) 2

50. Halle
- $M + N + D$
- si los sumandos representan los puntos de convergencia de las series:

$$M: \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} \right\}; N: \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2} \right\}$$

$$D: \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{k^2+1} \left[1 - \left(\frac{1}{\pi} \right)^{2k+1} \right] \right\}$$

- A) $\frac{6\pi+7}{\pi}$ B) $\frac{7\pi+6}{6\pi}$ C) $\frac{\pi+1}{\pi}$
D) $\frac{2\pi+3}{\pi}$ E) $\frac{2\pi+3}{6\pi}$

51. Determine la edad de la persona menor, sabiendo que éstas forman una progresión aritmética creciente, cuya suma es 63 y la suma de sus cuadrados es 1395 (son 3 personas)

- A) 14 B) 15 C) 18
D) 21 E) 27

52. Dadas las progresiones aritméticas

$$P_1: \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{94}{3}$$

$$P_2: \frac{4}{3}, \frac{31}{6}, \dots, \frac{41}{2}$$

Determine la suma de los elementos de P_1 que también pertenecen a P_2 .

- A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{41}{2}$ C) $-\frac{131}{6}$
D) $-\frac{75}{2}$ E) $-\frac{31}{6}$

53. Tres números enteros en P.A. cumple la siguiente relación: la suma de los tres al cuadrado es igual a su producto. Determine la suma de estos números.

- A) 26 B) 36 C) 46
D) 56 E) 76

54. Se prepara una cantidad de reserva de comida para 31 conejos, sabiendo que estos consumen $6\frac{1}{2}$ kg semanales cada uno. Dicha reserva se hizo en el supuesto de que el número de animales permaneciera fijo, pero cada semana disminuye un conejo; la comida reservada duró el doble del tiempo previsto. ¿Qué cantidad de comida se preparó?

- A) 3224 kg B) 3324 kg C) 3234 kg
D) 3432 kg E) 3424 kg

55. Determine el valor de cuatro números a, b, c, d , si los tres primeros términos están en progresión aritmética y los tres últimos en progresión geométrica, siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios igual a 12. Indique el mayor de ellos.

- A) 2 B) 4 C) 8
D) 12 E) 16

56. Si los números positivos x_1, x_2 y x_3 están en P.A. y los números positivos y_1, y_2 y y_3 están en P.G. y se sabe que: $x_1 = y_1 = 3, x_2 - y_2 = 6$ y $x_3 = y_3$.

Determine el valor de: $\sum_{k=1}^3 (x_k + y_k)$

- A) 81 B) 84 C) 70
D) 112 E) 98

57. Si se define la siguiente progresión geométrica:

$$2; 2+r; 2+2r; \dots$$

determine el valor de r .

- A) -1 B) -2 C) 0
D) 1 E) 2

58. Si el término de lugar $2n$ es " n " veces el término de lugar n en una progresión geométrica cuyo primer término es " n ". Determine el término de lugar $(n+1)$ en dicha progresión.

- A) n B) $2n$ C) $3n$
D) n^2 E) $2n^2$

59. En una progresión geométrica se conoce que el primer término es 7, el último es 567 y la suma de todos los términos es 847. Determine la suma del número de términos y la razón de dicha progresión geométrica.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

60. Se han interpolado entre 3 y 384 un cierto número de medios geométricas cuya suma es 378. Determine la razón de interpolación.

- A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{6}{5}$

61. Una progresión geométrica finita tiene n términos. Si S es la suma de sus términos, S' la suma de sus recíprocos y P el producto de sus términos,

entonces en la expresión $P^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^x$

el valor de x es:

- A) n B) $2n$ C) $3n$
D) $\frac{n}{2}$ E) $\frac{n}{3}$

62. Dado un círculo de radio r , se construye un segundo círculo cuyo diámetro sea el radio del anterior, un tercero cuyo diámetro sea el radio del segundo y así sucesivamente, ¿cuál será la suma de las áreas de todos los círculos así formados?

- A) $\frac{\pi r^2}{3}$ B) $\frac{4\pi r^2}{3}$ C) $\frac{2\pi r^2}{3}$
D) $\frac{5\pi r^2}{3}$ E) $\frac{7\pi r^2}{3}$

63. Determine el valor de n en la siguiente igualdad

$$1 + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = 719$$

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

64. Determine el valor de:

$$J = \frac{(1+2!)(2+3!)(3+4!)\dots(19+20!)}{20!19!18!\dots3!2!1!}$$

- A) 10 B) 10,5 C) 20
D) 21,5 E) 22

65. Determine el valor de " n " en la siguiente igualdad:

$$\frac{[3(3n^2 + 10n + 8)](3n+5)!(3n+4)!}{(3n+5)! - (3n+4)!} = 108!$$

- A) 22 B) 16 C) 17
C) 12 E) 34

66. Determine la suma de los valores de " n " que verifican la siguiente igualdad

$$\frac{n!(n! - 321)}{5(n!) - 9} = 80$$

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 10

67. Determine una expresión equivalente

al simplificar $\frac{2^n [(2n)!]^2}{(4n)! (2n-1)!}$

- A) $2n!$ B) $(2n+1)!$ C) $n!$
D) $(n+1)!$ E) $4n!$

68. Un hombre se encuentra en el origen de un sistema cartesiano rectangular de ejes OX y OY . El hombre puede dar sólo un paso a la vez, para el norte (N) o para el este (E).

¿cuántas trayectorias puede recorrer, si da exactamente 4 pasos?

- A) 18 B) 4 C) 16
D) 8 E) 32

69. Cuántos números de tres dígitos, sin dígitos repetidos, pueden escribirse con los dígitos del conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- A) 120 B) 210 C) 222
D) 280 E) 300

70. ¿Dé cuántas formas pueden sentarse un padre, su esposa y sus tres hijos en una fila de 5 asientos?

- A) 30 B) 40 C) 80
D) 100 E) 120

71. ¿De cuántas formas diferentes se podrían sentar en una fila de 7 asientos, 4 hombres y 3 mujeres, de tal manera que las 3 mujeres siempre estén juntas?

- A) 180 B) 360 C) 480
D) 720 E) 1440

72. ¿Cuántos números menores que 2367

se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 si cada dígito se usa una sola vez?

- A) 2 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

73. Un joven estudiante ordenará nueve libros en la repisa de su dormitorio. Determine de cuántas maneras los puede acomodar si la condición es que tres libros específicos jamás deben estar juntos.

- A) 332640 B) 332660 C) 30240
D) 30244 E) 332666

74. Cuántos números pares y mayores que 5×10^5 se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si no hay repetición de dígitos?

- A) 120 B) 420 C) 360
D) 450 E) 720

75. Sobre una mesa se encuentran 10 bolsas, de las cuales 5 son azules; 3 son blancas y las restantes de color negro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar dichas bolas en fila?

- A) 1320 B) 1560 C) 2010
D) 2024 E) 2520

76. Ocho amigos se sientan alrededor de una mesa, si uno de ellos siempre debe estar entre otros 2 de cuántas maneras lo pueden hacer.

- A) 180 B) 200 C) 220
D) 240 E) 260

77. Determine $n+r$ en

$$\frac{C_r^n + 3C_{r-1}^n + 3C_{r-2}^n + C_{r-3}^n}{C_{r-1}^n + 2C_{r-2}^n + C_{r-3}^n} = \frac{37-r}{r}$$

- A) 32 B) 34 C) 35
D) 36 E) 37

78. Si:

$$H = \left\{ x \in \mathbb{Z}^+ / 3 \binom{10x}{3} - 4196 \binom{5x}{2} = 0 \right\} = \{abc\}$$

Indique el valor de $a + b + c$.

- A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

79. Determine el valor de x en la siguiente igualdad:

$$\frac{C_{x+1}^{2x} + C_{x-1}^{2x}}{C_{x+2}^{2x} + C_{x-2}^{2x}} = \frac{19}{16}$$

- A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

80. Determine el valor de $J = 3x + 7y$, si se cumple:

$$C_{y-1}^x = C_y^x ; 4C_{y-1}^x = 5C_{y-2}^x$$

- A) 86 B) 114 C) 120
D) 186 E) 217

81. Si $C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_{n-1}^n = 30$ entonces el valor de " n " es:

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

82. Se considera una baraja de 20 naipes repartida en cuatro colores, cada color se compone de 5 naipes: as, rey, dama, valet, diez; se denomina "mano" a todo subconjunto de 5 naipes elegidos de esta baraja.

Obtenga $M + N$ si:

M es el número de "manos" distintas

N es el número de manos distintas que contienen dos ases.

- A) 18486 B) 18468 C) 18864
D) 18648 E) 18846

83. Se quiere seleccionar 5 preguntas de un total de 12, pero 2 de ellos no pueden escogerse a la vez.

¿cuántas formas existen?

- A) 680 B) 672 C) 920
D) 1080 E) 162

84. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 juguetes entre 3 niños, de tal manera que cada niño reciba cuatro juguetes?
A) 34660 B) 34650 C) 34655 D) 34670 E) 34666
85. En un estante hay 4 libros de aritmética y 5 de álgebra. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden coger 5 libros de modo que 2 sean de aritmética y 3 de álgebra?
A) 30 B) 40 C) 54 D) 60 E) 120
86. Una clínica tiene 25 empleados profesionales, 4 de ellos cirujanos. ¿De cuántas maneras puede formarse grupos de tres profesionales, donde por lo menos uno de ellos sea cirujano?
A) 580 B) 120 C) 720 D) 970 E) 1200
87. Determine el coeficiente del término $x^{28}y^{18}$ en el desarrollo de $(x^2 + y^3)^{20}$.
A) C_3^{20} B) C_4^{20} C) C_5^{20} D) C_6^{20} E) C_7^{20}
88. En el desarrollo del binomio $(1 + y)^{52}$ los coeficientes de los términos de lugares " $2m + 1$ " y " $m + 2$ " son iguales; determine dichos lugares.
A) 35; 19 B) 34; 20 C) 33; 21 D) 32; 22 E) 31; 33
89. Determine el t_{103} del desarrollo de $(x^3 - \sqrt[3]{y})^{104}$.
A) $C_{102}^{104} x^4 y^{36}$
B) $C_{80}^{104} x^6 y^{34}$
C) $C_{102}^{104} x^6 y^{34}$
D) $C_{82}^{104} x^6 y^{34}$
E) $C_{102}^{104} x^6 y^{32}$
90. Si el término n contado a partir del último término en el desarrollo de $\left(x^3 + \frac{1}{y^2}\right)^n$ es $px^{18}y^{-2}$, entonces el valor de $T = n.p$
A) 49 B) 84 C) 96 D) 100 E) 108
91. Si el único término central del desarrollo de $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^n$ es $1120x^4$. Determine el séptimo término de dicho desarrollo.
A) $1500x^{-8}$ B) $1792x^{-8}$
C) $2500x^{-3}$ D) $1580x^{-6}$
E) $180x^{-2}$
92. Si el décimo término del desarrollo del binomio $(x^p + x^q)^n$ es x^{18} , entonces el valor de $(q + n)$ es:
A) 9 B) 11 C) 12 D) 15 E) 18
93. Los exponentes de x en el desarrollo del binomio $\left(x^m + \frac{1}{\sqrt[3]{x^m}}\right)^n$ van disminuyendo de 8 en 8, el término de lugar 13 es independiente de x , entonces el número de términos de su desarrollo es:
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17
94. A qué exponente se debe elevar el binomio $x^2 + \frac{1}{2x}$; si el término de lugar 11 de su expansión es de grado 20.
A) -15 B) -5 C) 10 D) 20 E) 25
95. En la expansión de $(4x^3 + 3y^2)^n$, la suma de los grados absolutos de todos los términos de su expansión es 275, determine el valor de n .
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

① $\text{FEA: } x+2y < 5 \dots (1)$
 $x-y < 3 \dots (2)$

$$x - y < 3 \dots (2)$$

DOUDE: $x; y \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \cdot \underline{(1) + (2) \times 2}: & \quad x + 2y < 5 \\ & \quad 2x - 2y < 6 \end{aligned} \quad \} (+)$$

$$3x < 11 \rightarrow x < 3,6$$

DE ΔBUI: $x=3; 2 \text{ ó } 1$

$$*P, x=3 \begin{cases} f(1): y < 1 \\ f(2): y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Def: } 0 < y < 1 \rightarrow y \notin \mathbb{N}$$

$$* \text{p. } \underline{x=2} \begin{cases} \underline{Fu(1)}: y < 1,5 \\ \underline{Fu(2)}: y > 1 \end{cases}$$

OBS: $-1 < y < 1,5 \rightarrow \overline{y=1} \in \mathbb{N}$

→ Solución E: $(2; 1)$

$$* \beta_1 \quad \underline{\underline{x=1}} \quad \begin{cases} \underline{\underline{Fu(1): y < 2}} \\ \underline{\underline{Fu(2): y > -2}} \end{cases}$$

Obj: $-2 < y < 2 \rightarrow \overline{y} = 1 \in \mathbb{N}$

→ Solução E: $(1; 1)$

$\therefore \# \text{DESOLUCIONES NATURALES} = 2$

② $\text{FeA: } 3x + 2y < 20 \dots (1)$
 $2x - y < 2 \dots (2)$
 $3x - y > 3 \dots (3)$

$$2x - y < 2 \quad \dots (2)$$

$$3x - y > 3 \quad \dots (3)$$

DO/IDE $x, y, z \in \mathbb{N}$

$$\cdot \frac{(1)+(2) \times 2}{4x-2y < 4} \left. \vphantom{\frac{(1)+(2) \times 2}{4x-2y < 4}} \right\} (4)$$

• (3)-(2): $x > 1 \dots (\beta)$

• DE(α) γ (β): $1 < x < 3,4$

DE AQUÍ: $\chi = 203$

$$\text{b) Si } x=2 \begin{cases} \underline{F_1(2): y > 2} \\ \underline{F_2(3): y < 3} \end{cases}$$

Obj: $2 < y < 3 \rightarrow y \notin \mathbb{Z}$

$$+ S_1 \quad \underline{\underline{x=3}} \quad \begin{cases} \underline{f_1(2)}: y > 4 \\ \underline{f_1(3)}: y < 6 \end{cases}$$

$$\text{obj: } 4 < y < 6 \rightarrow \overline{y} = 5 \in \mathbb{Z}$$

ADemás: $x=3$; $y=5$

i SATISFACEN LA NEC. (1)!

$$\therefore T = 5(3) - 3(5) = \underline{0} \text{ K}$$

③ $\text{FeA: } 3x - 4y > 10 \dots (I)$

$$x + 2y \leq 12 \dots (2)$$

$$y > -6 \dots (3)$$

Dowide: $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\cdot \begin{array}{l} (1) + (2) \times -3 : 3x - 4y > 10 \\ -3x - 6y > 36 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) + (2) \times -3 : 3x - 4y > 10 \\ -3x - 6y > 36 \end{array}} \right\} (+)$$

$$-104 > 46$$

$$\rightarrow y < -4,6$$

VENDO QUE: $-6 < y < -4,6$

$$\rightarrow y = -5$$

$$+SI \underline{y = -5} \begin{cases} FU(1): x > -3,3 \\ FU(2): x < -2 \end{cases}$$

Obf: $-3, 3 < x < -2 \rightarrow x = -3 \in \mathbb{Z}$

con esto: $T = (-3) + (-5) = -8$

④ Sea: $y \rightarrow \# \text{SELLOS QUE POSEE}$
 $x \rightarrow \# \text{DE HOJAS DEL ÁLBUM}$

(1)... $y > 20x$; (2)... $y < 23(x-1)$

(3)... $21x + y = 500$

DE (3): $y = 500 - 21x$

• EN (1): $500 - 21x > 20x$

$\leadsto 41x < 500 \rightarrow x < 12,1$

• EN (2): $500 - 21x < 23x - 23$

$\leadsto 43x > 523 \rightarrow x > 11,1$

Obs: $11,1 < x < 12,1$

$\therefore x = 12$

⑤ Sea: $x + y + z \leq 6 \dots (1)$

$x + y \geq 3 \dots (2)$

$y + z \geq 5 \dots (3)$

$x + z \geq 4 \dots (4)$

donde: $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

• DE (1): $y + z \leq 6 - x$

• CON (2): $5 \leq y + z \leq 6 - x$

Obs: $x \leq 1 \rightarrow x = 1$

• EN (1): $y + z \leq 5$

• DE (3): $y + z \geq 5$

ADemás, DE (2) y (4): $y \geq 2$ y $z \geq 3$

• DE (*): $y = 2 \wedge z = 3$

$\therefore T = (1)(2)(3) = 6$

⑥ Sea: $z - 1 < x + y < z + 1 \dots (1)$

$z - 7 < x - y < z - 5 \dots (2)$

$10 < x + z < 12 \dots (3)$

donde: $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

• EN (1), RESTO z : $-1 < x + y - z < 1$

• EN (2), RESTO z : $-7 < x - y - z < -5$

$\leadsto$ SUMANDO: $-8 < 2(x - z) < -4$

DE AQUÍ: $-4 < x - z < -2 \dots (4)$

• (3) + (4): $6 < 2x < 10 \rightarrow 3 < x < 5$

Obs: $x = 4 \in \mathbb{Z}^+$

• EN (3): $10 < 4 + z < 12$

$\rightarrow 6 < z < 8 \rightarrow z = 7 \in \mathbb{Z}^+$

• EN (1): $6 < 4 + y < 8$

$\rightarrow 2 < y < 4 \rightarrow y = 3 \in \mathbb{Z}^+$

con esto: $T = \frac{4+3}{7} = 1$

⑦ Sea: $\log_{1/2}(5x - 12) < -3 \dots (1)$

$8 < 2^x < 32 \dots (2)$

• DE (2): $2^3 < 2^x < 2^5$

$\rightarrow 3 < x < 5 \rightarrow x \in \{3, 5\}$

con esto: $3 < 5x - 12 < 13$

EN (1)

• DE (4): Si $\log_{1/2}(5x - 12) < -3$

$\rightarrow 5x - 12 > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \rightarrow 5x - 12 > 8$

DE AQUI: $x < 4 \rightarrow x \in \langle 4; +\infty \rangle \left| S_1 \right.$
 LUEGO: C.S. = $S_1 \cap S_2$
 $= \langle 4; +\infty \rangle \cap \langle 3; 5 \rangle$
 $\therefore$ C.S. = $\langle 4; 5 \rangle$

⑧ SEA: $y - x^2 + 6x - 12 > 0 \dots (1)$
 $2y - x \leq 4 \dots (2)$

DOBLE: $x; y \in \mathbb{Z}$

• (1) $x - 2 + (2)$:
 $-2y + 2x^2 - 12x + 24 < 0$
 $2y - x \leq 4$
 $2x^2 - 13x + 24 \leq 4$

$\rightarrow 2x^2 - 13x + 20 \leq 0 \rightarrow (2x-5)(x-4) \leq 0$

FACTORIZO

DE AQUI: $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$

DOBLE: $x = 3 \text{ ó } 4$

• SI $\underline{x=3}$ $\begin{cases} \text{EN (1): } y > 3 \\ \text{EN (2): } y \leq 3,5 \end{cases}$

DE AQUI: $3 < y \leq 3,5 \rightarrow \underline{y=3} \in \mathbb{Z}$

CON ESTO: $x+y=6$

• SI $\underline{x=4}$ $\begin{cases} \text{EN (1): } y > 4 \\ \text{EN (2): } y \leq 4 \end{cases}$

DE AQUI: $4 < y \leq 4 \rightarrow \underline{y=4}$

CON ESTO: $x+y=8$ MAJOR VALOR

⑨ SEA: $\lg x^3 > \lg x^2 - 1 \dots (1)$
 $\lg x^2 < \lg x^6 - 1 \dots (2)$

DE (1): $x > 0 \wedge 3 \lg x > 2 \lg x - 1$

$x > 0 \wedge \lg x > -1$

$\underline{x > 0 \wedge x > 10^{-1}}$

INTERSECTANDO: $x > \frac{1}{10} \left| S_1 \right.$

DE (2): $x > 0 \wedge 7 \lg x < 6 \lg x - 1$

$x > 0 \wedge \lg x < -1$

$\underline{x > 0 \wedge x < 10^{-1}}$

INTERSECTANDO: $0 < x < 10^{-1} \left| S_2 \right.$

LUEGO: C.S. = $S_1 \cap S_2$
 $= \langle \frac{1}{10}; +\infty \rangle \cap \langle 0; \frac{1}{10} \rangle$

$\therefore$ C.S. = $\langle \frac{1}{10}; \frac{1}{10} \rangle$

IDENTIFICANDO CON EL DATO:

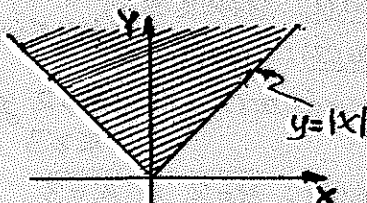
$a = \frac{1}{10}$ y $b = \frac{1}{10}$

OTAMBIÉN: $10a = 1$ y $10b = 1$

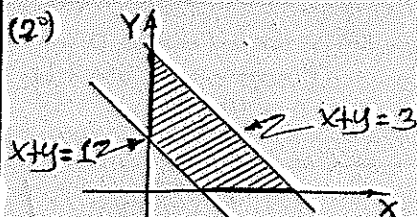
$\therefore T = 1 + 1 = 2$

⑩ SEGÚN GRÁFICO, LA REGIÓN SOMBRADA SE OBTIENE DE INTERSECTAR LAS DOS REGIONES SOMBRADAS SIGUIENTES:

(1°)



EL GRÁFICO CORRESPONDE A:
 $y > |x|$



EL GRÁFICO CORRESPONDE A:
 $x+y \geq 1$; $x+y \leq 3$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
 FINALMENTE EL SISTEMA ES:

$$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ y \geq 1; x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

(1)

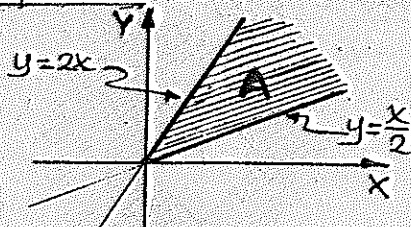
GRABIFQUEMOS CADA UNO DE LOS CONJUNTOS.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{y}{4} \leq \frac{x}{2} \leq y\}$$

$$\text{DE AQUÍ: } \frac{y}{4} \leq \frac{x}{2} \wedge \frac{x}{2} \leq y$$

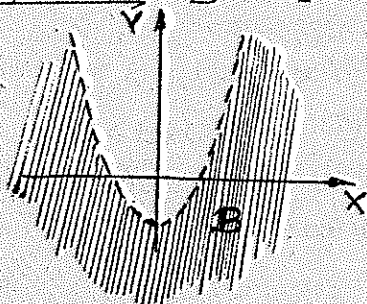
$$\text{ó } y \leq 2x \wedge y \geq \frac{x}{2}$$

GRABIFQUEMOS A:



$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x^2 - 1\}$$

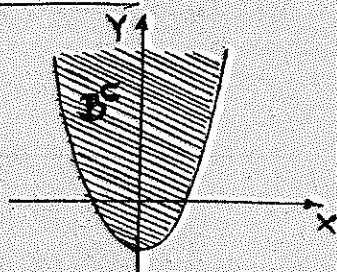
GRABIFQUEMOS B: $y < x^2 - 1$



A PARTIR DE B, PODEMOS DECIR:

$$B^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - 1\}$$

GRABIFQUEMOS B^c :

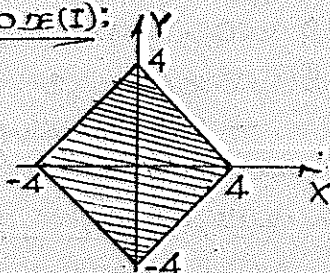


AHORA PODEMOS DECIR: LA GRÁFICA DADA ES LA REPRESENTACIÓN DE $A \cap B^c$.

$$\text{PERO: } A \cap B^c = \underline{A - B}$$

(12) DE $|x| + |y| \leq 4 \dots (I)$

GRÁFICO DE (I):

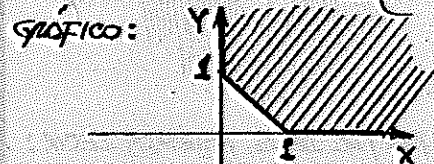


• DE $x+|x|+y+|y| \geq 2 \dots (II)$
ANALICEMOS 4 CASOS Y GRAFIQUEMOS PARA CADA CASO.

(1°) Si $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

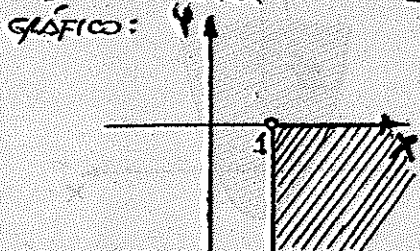
En (II): $x+x+y+y \geq 2$

$\rightarrow x+y \geq 1 \rightarrow y \geq 1-x$



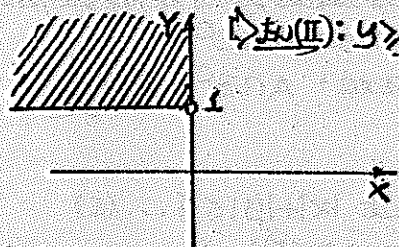
(2°) Si $x \geq 0 \wedge y < 0$

En (II): $x+x+y-y \geq 2 \rightarrow x \geq 1$



(3°) Si $x < 0 \wedge y \geq 0$

En (II): $y \geq 1$



(4°) Si $x < 0 \wedge y < 0$

En (II): $x-x+y-y \geq 2$

$\rightarrow 0 \geq 2$ ¡ABSURDO!

⇒ NO HAY SOLUCIÓN (φ)

FINALMENTE, LA GRÁFICA DE (II);

VIEVE DADO POR LA UNIÓN DE LAS 3 GRÁFICAS ANTERIORES, ÉSTA ES:

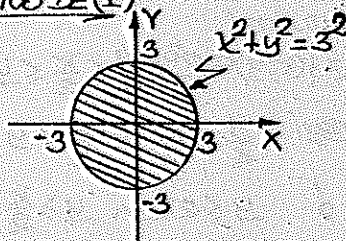


POR ÚLTIMO, LA INTERSECCIÓN DE LAS GRÁFICAS DE (I) y (II), NOS PRODUCE LA SOLUCIÓN GRÁFICA DEL SISTEMA DADO.

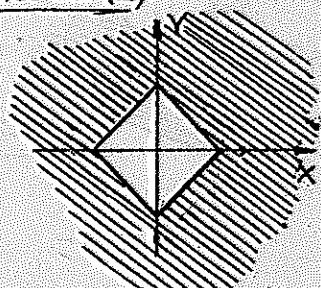
∴ GRÁF. APROX. (C)

(13) • DE A: $x^2+y^2 \leq 9 \wedge |x+|y|| \geq 3$
(1) (2)

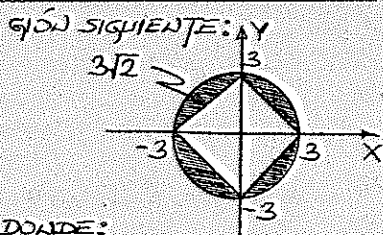
• GRÁFICO DE (1)



• GRÁFICO DE (2):



• LUEGO, INTERSECTANDO LAS GRÁFICAS ANTERIORES, SE TIENE LA RE-



DONDE:

$$\text{ÁREA PEDIDA} = \text{ÁREA } \bullet - \text{ÁREA } \blacklozenge$$

$$\pi(3)^2 - (3\sqrt{2})^2$$

$$\therefore \text{ÁREA PEDIDA} = 9(\pi - 2) \text{ U}^2$$

14) DE $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{11}{25}, \frac{31}{125}, \frac{89}{625}, \dots \right\}$

VENGOS QUE:

$$+ a_1 = \frac{4}{5} = \frac{3^1 + 2^0}{5^1}$$

$$+ a_2 = \frac{11}{25} = \frac{3^2 + 2^1}{5^2}$$

$$+ a_3 = \frac{31}{125} = \frac{3^3 + 2^2}{5^3}$$

$$+ a_4 = \frac{89}{625} = \frac{3^4 + 2^3}{5^4}$$

$$+ \text{DE AQUÍ: } a_5 = \frac{3^5 + 2^4}{5^5} = \frac{259}{5^5}$$

15) DATO: $a_{n+1} = \frac{a_n}{10}$; $a_1 = 1$

$$+ n=1 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{10} \rightarrow a_2 = \frac{1}{10^1}$$

$$+ n=2 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{10} \rightarrow a_3 = \frac{1}{10^2}$$

$$+ n=3 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{10} \rightarrow a_4 = \frac{1}{10^3}$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

CON ESTO, DECIMOS:

$$a_n = \frac{1}{10^{n-1}} \quad \text{ó} \quad a_n = 10^{-(n-1)}$$

16) (*) DE $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$; $a_1 = \sqrt{2}$

OBSERVAMOS:

$$+ a_2 = \sqrt{2a_1} \rightarrow a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

$$+ a_3 = \sqrt{2a_2} \rightarrow a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$+ a_4 = \sqrt{2a_3} \rightarrow a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

$\vdots$

$\vdots$

NOTÉSE QUE:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

$\rightarrow$ LA SUCESIÓN ES CRECIENTE

$\Downarrow$ (I) ES V

(**) DE LA SUCESIÓN $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$, SE

$$\text{TIENE: } a_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow a_n - a_{n+1} &= \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{n+2n - n^2 - n - 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-n^2 + n + 1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n+1} < 0 \rightarrow a_n < a_{n+1}$$

$\rightarrow$ LA SUCESIÓN ES CRECIENTE

$\Downarrow$ (II) ES F

(***) DE LA SUC. $\left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\} \rightarrow a_n = \frac{n}{n^2+1}$

LUEGO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

$\Downarrow \{a_n\}$ ES CONVERGENTE; DONDE

SE SABE POR PROPIEDAD QUE TODA SUCESIÓN CONVERGENTE ES ACOTADA.

⇨ (III) ES V

∴ (I) y (III) SON CORRECTOS

(17) DE LA SUCESIÓN:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{31}{125}, \frac{175}{625}, \dots \right\}$$

(*)
Obs: $a_1 = \frac{1}{5} \wedge a_2 = \frac{1}{25}$

DONDE: $a_1 < a_2 \left(\frac{1}{5} < \frac{1}{25} \right)$

CON ESTO, YA SE PUEDE AFIRMAR QUE NO ES DECRECIENTE.

⇨ (I) ES F

(**) $a_1 = \frac{1}{5} \rightarrow a_1 = \frac{4^1 - 3^1}{5^1}$

$$a_2 = \frac{1}{25} \rightarrow a_2 = \frac{4^2 - 3^2}{5^2}$$

$$a_3 = \frac{31}{125} \rightarrow a_3 = \frac{4^3 - 3^3}{5^3}$$

$$a_4 = \frac{175}{625} \rightarrow a_4 = \frac{4^4 - 3^4}{5^4}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4^n - 3^n}{5^n}$$

AHORA:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^n}{5^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

RECUERDE

Si $0 < K < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} K^n = 0$

APLICANDO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 - 0 = 0$$

⇒ $\{a_n\}$ ES CONVERGENTE ⇨ (III) ES V

(***) POR LO ANTERIOR ⇨ (III) ES F

∴ SÓLO (III) ES CORRECTO

(18) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$a_n = \sqrt[3]{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}} \rightarrow a_n = 2 + \frac{3}{\sqrt{n}}$$

DONDE: $a_{n+1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{n+1}}$

LUEGO:

$$\begin{aligned} (*) a_n - a_{n+1} &= \sqrt[3]{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}} - \sqrt[3]{2 + \frac{3}{\sqrt{n+1}}} \\ &= 3 \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \end{aligned}$$

ESTO ES (+) ∀ n EN

$$\Rightarrow a_n - a_{n+1} > 0 \rightarrow a_n > a_{n+1}$$

→ LA SUCESIÓN ES DECRECIENTE

⇨ (I) ES F

(**) PODEMOS QUE $n > 1 \rightarrow \sqrt{n} > 1$

• INVIERTO: $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$

• POR 3: $0 < \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 3$

• SUMO 2: $2 < 2 + \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 5$

→ $\{a_n\}$ ES ACOTADA ⇨ (III) ES V

(***) DE $|a_n - 2| < 4$

$$\rightarrow \left| 2 + \frac{3}{\sqrt{n}} - 2 \right| < 4 \rightarrow -4 < \frac{3}{\sqrt{n}} < 4$$

• Al $\square$: $0 < \frac{a}{n} < 16$

$\rightarrow \frac{n}{9} > \frac{1}{16} \rightarrow n > \frac{9}{16} \nabla (III) \text{ y } V$
(MEN)

$\therefore (II) \text{ y } (III) \text{ son correctos} / x$

10) RECUERDE

Si $a > b > 0$, se cumple:

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

MEDIA ARITMÉTICA MEDIA CUADRÁTICA

(*) DE $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

$\rightarrow 2a_{n+1} = a_n + b_n$

DE AQUÍ: $a_n - a_{n+1} = \underbrace{a_n - b_n}_{\frac{a_n + b_n}{2} - b_n}$

$\Rightarrow a_n - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \dots (\alpha)$

COMO LAS SUCECIONES NO SON IGUALES ($a_i < b_i$) Y SUS TÉRMINOS SON POSITIVOS, ENTONCES, DE ACUERDO AL CUADRO, DECIMOS:

$a_{n+1} < b_{n+1}; \forall n$

O TAMBIÉN: $a_n < b_n \rightarrow \frac{a_n - b_n}{2} < 0$

(*) (α) : $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} < 0$

DE AQUÍ: $a_n - a_{n+1} < 0 \rightarrow a_n < a_{n+1}$

$\rightarrow$ LA SUCECIÓN ES CRECIENTE

$\nabla (IV) \text{ y } V$

(**) $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \rightarrow b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

$\rightarrow 2b_{n+1} = a_n + b_n$

DE AQUÍ: $b_n - b_{n+1} = \underbrace{b_n - a_n}_{\frac{a_n + b_n}{2} - a_n}$

$\Rightarrow b_n - b_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \dots (\beta)$

USANDO EL CUADRO: $a_{n+1} < b_{n+1}$

O TAMBIÉN $a_n < b_n$

$\rightarrow a_n < b_n \rightarrow b_n - a_n > 0$

(*) (β) : $b_n - b_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$

DE AQUÍ: $b_n - b_{n+1} > 0$

$\rightarrow b_n < b_{n+1} \rightarrow b_n < b_{n+1}$

$\rightarrow$ LA SUCECIÓN ES DECRECIENTE

$\nabla (II) \text{ y } V$

(***) SEGÚN EL CUADRO: $a_{n+1} < b_{n+1}$

O TAMBIÉN: $a_n < b_n; \forall n$

$\nabla (III) \text{ y } F$

(****) SUPONGAMOS QUE $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

$\Rightarrow$ TAMBIÉN $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$

LUEGO, EN LA 1ª FÓRMULA

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{2}$

DEA QUE: $L = \frac{L - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{2}$

$\rightarrow 2L = L - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

⇒ LAS SUCECIONES CONVERGEN EN EL MISMO PUNTO L. (IV) ES V

NOTA: EN LA 2ª FÓRMULA OCURRE LO MISMO.

∴ (I), (II) y (IV) SON CORRECTOS

$$(20) a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\hookrightarrow \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{37}{60}, \dots \right\}$$

Obs: $a_1 < a_2$; CON ESTO, ES SUFICIENTE PARA AFIRMAR QUE $\{a_n\}$ NO ES DECRECIENTE (I) ES F

$$(*) a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\hookrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$$

$$\begin{aligned} n \cdot a_n - a_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+2}} \end{aligned}$$

RAZIONALIZO:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{(\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+2}) (\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n+1})}$$

Obs: EL 2º MIEMBRO ES (+), ENTON-

CE: $a_n - a_{n+1} > 0 \rightarrow a_n > a_{n+1}$

$\{a_n\}$ ES DECRECIENTE (III) ES V.

(**) POR TEORIA: V ∴ (II) y (III)

$$(21) \text{Obs: } a_n = \frac{2^n \cdot 2 + 3^n \cdot 3 - 1}{2^n + 3^n \cdot 3}$$

EXTRAEMOS 3º DEL NUMERADOR Y DENOMINADOR; QUEDARÁ ASÍ:

$$a_n = \frac{3^n \left[2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{3} \right]}{3^n \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + 27 \right]}$$

Aquí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + 27}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{0 + \frac{1}{3}}{0 + 27} = \frac{1}{81}$$

∴ $\{a_n\}$ CONVERGE A $\frac{1}{81}$

$$(22) \text{Obs: } a_1 = \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^3$$

$$a_2 = \left(\frac{4}{3} \right)^4 = \left(1 + \frac{1}{3} \right)^4$$

$$a_3 = \left(\frac{5}{4} \right)^5 = \left(1 + \frac{1}{4} \right)^5$$

⋮

$$\hookrightarrow a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}$$

Aquí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}_{\text{CONOCIDO}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

RECUERDE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

APLICANDO:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \times 1 = e$$

$\therefore$ LA SUCESIÓN CONVERGE A e

(23) DE LA SUCESIÓN:

$$a_n = \left[\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \right]^{n+3}$$

$$a_n = \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} \right]^{n+3} \left[\frac{(n-2)}{(n+2)} \right]^{n+3}$$

DESDOBLANDO EN C/PARÉNTESIS:

$$a_n = \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+3} \times \left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)^{n+3}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1} \times \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^2 \times \left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)^{n+2} \times \left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)$$

AQUÍ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)^{n+2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)$$

$$\text{OTO: } \begin{matrix} \text{Si } n \rightarrow \infty & \begin{matrix} \nearrow n+1 \rightarrow \infty \\ \searrow n+2 \rightarrow \infty \end{matrix} \end{matrix}$$

RECUERDE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

APLICANDO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2} \times 1 \times e^{-4} \times 1 = e^{-6}$$

$\therefore$ LA SUCESIÓN CONVERGE
A e^{-6}

(24) SEA $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

$$\rightarrow a_n = \left[\frac{(n+1)-2}{n+1} \right]^n = \left[1 + \frac{-2}{n+1} \right]^n$$

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)}$$

LUEGO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)}$$

$$\text{PO } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{e^{-2}}{1} = e^{-2}$$

$\therefore$ S CONVERGE A e^{-2}

(25) DADO: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

RACIONALIZAMOS:

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]}{[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]}$$

$$\text{PO } a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

AQUÍ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0$$

$\therefore \{a_n\}$ CONVERGE A 0

(26) SEA $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{(2n+1)^2(3n-1)^2}$

$$= \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2}{(2n+1)^2(3n-1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4(2n+1)^2(3n-1)^2}$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4(2n+1)^2(3n+1)^2} \right]$$

REQUERDE

$$\text{Si } f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

DONDE $m = n$ (GRADOS = S)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0} \begin{matrix} \text{COEFICIENTES} \\ \text{PRINCIPALES} \end{matrix}$$

APLICANDO:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{(1)(1)}{4(2)^2(3)^2} = \frac{1}{144}$$

 $\therefore$ LA SUCESIÓN CONVERGE A $\frac{1}{144}$

$$(27) \{a_n\} = \left\{ \frac{11}{30}, \frac{111}{300}, \frac{1111}{3000}, \dots \right\}$$

DE AQUÍ:

$$a_1 = \frac{11}{30} \times \frac{9}{9} = \frac{10^2 - 1}{27(10^1)} = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10^1} \right)$$

$$a_2 = \frac{111}{300} \times \frac{9}{9} = \frac{10^3 - 1}{27(10^2)} = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10^2} \right)$$

$$a_3 = \frac{1111}{3000} \times \frac{9}{9} = \frac{10^4 - 1}{27(10^3)} = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10^3} \right)$$

$$\vdots$$

TÉRMINO GENERAL:

$$a_n = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10^n} \right)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{1}{27} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{1}{10^n} \right) \\ &= \frac{1}{27} (10 - 0) = \frac{10}{27} \end{aligned}$$

 $\therefore \{a_n\}$ CONVERGE A $\frac{10}{27}$

$$(28) \text{ DE } \left\{ \frac{12}{4}; \frac{24}{7}; \frac{44}{12}; \frac{72}{19}; \dots \right\}$$

SE TIENE:

$$+a_1 = \frac{12}{4} = \frac{4(3)}{4} = \frac{4(1^2+2)}{1^2+3}$$

$$+a_2 = \frac{24}{7} = \frac{4(6)}{7} = \frac{4(2^2+2)}{2^2+3}$$

$$+a_3 = \frac{44}{12} = \frac{4(11)}{12} = \frac{4(3^2+2)}{3^2+3}$$

$$+a_4 = \frac{72}{19} = \frac{4(18)}{19} = \frac{4(4^2+2)}{4^2+3}$$

$$\vdots$$

TÉRMINO GENERAL:

$$a_n = \frac{4(n^2+2)}{n^2+3} = \frac{4n^2+8}{n^2+3}$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2+8}{n^2+3} \right)$$

POR EL REVERDE DE LA RESOL. (26)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{1} = 4$$

 $\therefore$ LA SUCESIÓN CONVERGE A 4

(29) HALLEMOS LA SUMA:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{11}{2^2} + \frac{111}{2^3} + \frac{1111}{2^4} + \dots \quad (\alpha)$$

MULTIPLICAMOS POR $\left(\frac{10}{2}\right)$:

$$\frac{10S}{2} = \frac{10}{2} + \frac{110}{2^2} + \frac{1110}{2^3} + \dots \quad (\beta)$$

 $(\alpha) - (\beta)$:

$$S - \frac{10}{2} S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{SUMA} &= \frac{1/2}{1 - 1/2} \\ \text{LÍMITE} &= 1 \end{aligned}$$

OJO: LA RAZÓN ES $\frac{1}{3} / |\frac{1}{3}| < 1$

LUEGO: $S\left(\frac{3-10}{3}\right) = \frac{1}{3-1}$

NO $S = \frac{2}{(2-1)(2-10)}$ PUNTO DE EQUILIBRIO

LUEGO: $\frac{2}{(2-1)(2-10)} = \frac{13}{36} = \frac{13}{(13-1)(13-10)}$

OBSÉRVESE: $2=13$, VERIFICA

ADemás: $|\frac{1}{3}| = |\frac{1}{13}| < 1$

$\therefore 2=13$

30) $x_{n+1} = \frac{3+3x_n}{3+x_n}$; $x_1 = 3$

Obs: Si $x_1 = 3$ podemos afirmar usando la regla, que los términos de la sucesión son positivos.

Ahora, si asumimos que el valor de la convergencia es L

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

LUEGO:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{3+3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{3+\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$

REEMPLAZANDO:

$L = \frac{3+3L}{3+L} \rightarrow 3L+L^2 = 3+3L$
 $\therefore L = 3$

31) Sea $S = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

EXTENDIENDO:

$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101}$

MULTIPLICO POR 2:

$2S = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{99 \times 101}$

DESDOBLAMOS EN CADA SUMANDO:

$2S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)$

CANCELANDO:

$2S = 1 - \frac{1}{101} \rightarrow 2S = \frac{100}{101}$

$\therefore S = \frac{50}{101}$

32) Obs: $\frac{nx - (n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{x}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$

$S = \sum_{n=2}^{100} \left(\frac{x}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$

$S = x \underbrace{\sum_{n=2}^{100} \frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{S_1} - \underbrace{\sum_{n=2}^{100} \frac{1}{n(n+1)}}_{S_2}$

CALCULEMOS POR PARTES:

$S_1 = \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{101 \times 102}$

DESDOBLANDO:

$S_1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right)$

$S_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{102} \rightarrow S_1 = \frac{11}{34}$

EN FORMA SIMILAR:

$$S_2 = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{100 \times 101}$$

DESDOBLANDO:

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{101} \rightarrow S_2 = \frac{99}{202}$$

EN S:

$$S = x \left(\frac{11}{34} \right) - \frac{99}{202} = \frac{103}{202} \text{ (DADO)}$$

$$x = \frac{11x}{34} = 1 \therefore x = \frac{34}{11}$$

RECUERDE

$$* 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$* 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$* 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(33) HALLAMOS: $S = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}$

EXTENDIENDO:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n} \quad (\alpha)$$

MULTIPLICAMOS POR $(\frac{1}{3})$:

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$(\alpha) - (\beta): \dots (\beta)$$

$$\frac{2}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

ADICIÓN DE LOS TÉRMINOS
DE UNA P.G. DE n TÉRMINOS
DE RAZÓN $= \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}S = \left(\frac{1}{3} \right) \left[\frac{\left(\frac{1}{3} \right)^n - 1}{\left(\frac{1}{3} \right) - 1} \right] - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S = \frac{1 \cdot (1 - 3^n) \cdot 3}{(-2)(3^n)} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$2S = \frac{(3^n - 1) \cdot 3}{2 \cdot 3^n} - \frac{n}{3^n}$$

Por 2: $4S = \frac{3^n \cdot 3 - 3 - 2n}{3^n}$

DESDOBLANDO ADECUADAMENTE:

$$4S = 3 - \frac{2n+3}{3^n} \rightarrow S = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$$

IDENTIFICANDO
CON EL DATO: $A = \frac{1}{4}$

(34) H. SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ:

$$\sum_{i=1}^{13} \left\{ (2i-1) \underbrace{\sum_{k=1}^{64} (\sqrt{5k-1} - \sqrt{5k+4})}_{S_1} \right\} = S$$

HALLAMOS S_1 , EXTENDIENDO:

$$+ S_1 = (\sqrt{4} - \sqrt{9}) + (\sqrt{9} - \sqrt{14}) + (\sqrt{14} - \sqrt{19}) + \dots + (\sqrt{319} - \sqrt{324})$$

$$(\Rightarrow S_1 = \sqrt{4} - \sqrt{324} = 2 - 18 \rightarrow S_1 = -16)$$

Luego: $S = \sum_{i=1}^{13} (2i-1)(-16)$

$$= (-16) \sum_{i=1}^{13} (2i-1)$$

EXTENDIENDO:

$$S = (-16)(-3 - 1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 15)$$

60

$$\therefore S = (-16)(60) = -960$$

(35) POR PARTE, HALLAMOS $\sum_{r=1}^n (2r-1)$

$$\sum_{r=1}^n (2r-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

CONOCIDO

REEMPLAZANDO TENEMOS:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (k+n^2) = (n+1)^3 + X$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} k + \sum_{k=1}^{2n+1} n^2 = (n+1)^3 + X \dots (\alpha)$$

PERO: $\sum_{k=1}^{2n+1} k = \underbrace{1+2+3+\dots+(2n+1)}_{\text{CONOCIDO}}$
 $= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}$
 $= (2n+1)(n+1)$

y $\sum_{k=1}^{2n+1} n^2 = n^2(2n+1)$

EN (x):

$2n^2+3n+1+2n^2+n^2 = (n+1)^3+x$
 $\Rightarrow \underbrace{n^3+3n^2+3n+1+n^2}_{(n+1)^3} = (n+1)^3+x$
 $\therefore x = \frac{n^3}{x}$

36) Obj: $\frac{k^4+k^3+1}{k^2+k} = \frac{k^2(k^2+k)+1}{k^2+k}$
 $= k^2 + \frac{1}{k(k+1)}$

SEA: $S = \sum_{k=1}^{20} (k^2 + \frac{1}{k(k+1)})$
 $= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)}$
 $\underbrace{\quad}_{S_1} \quad \underbrace{\quad}_{S_2}$

POR PARTES:

$+S_1 = \underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+20^2}_{\text{CONOCIDO}} = \frac{20 \times 21 \times 41}{6}$
 $= 2870$

$+S_2 = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{20 \times 21}$

DESDOBLANDO:

$S_2 = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{19}-\frac{1}{20})$

$+ (\frac{1}{19}-\frac{1}{20}) + \dots + (\frac{1}{19}-\frac{1}{20})$

$\rightarrow S_2 = 1 - \frac{1}{21}$

LUEGO: $S = (2870) + (1 - \frac{1}{21})$

$\therefore S = 2871 - \frac{1}{21}$

37) LOS SUMANDOS SE PUEDEN ESCRIBIR COMO SIGUE:

$D = (1^3+2) + (2^3+2) + (3^3+2) + (4^3+2) + \dots + (10^3+2)$

AGRUPANDO:

$D = (1^3+2^3+3^3+\dots+10^3) + (2+2+\dots+2)$

10 SUMANDOS

APLICANDO FÓRMULA CONOCIDA:

$D = \left[\frac{10(11)}{2} \right]^2 + 2(10) = 3045$

38) SIMILAR A LA RESOLUCIÓN 31

$F = \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{48 \times 50}$

MULTIPLICAMOS POR 2:

$2F = \frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{6 \times 8} + \dots + \frac{2}{48 \times 50}$

DESDOBLANDO:

$2F = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{24} - \frac{1}{50})$

$2F = \frac{1}{2} - \frac{1}{50} \rightarrow 2F = \frac{24}{50}$

$\therefore F = \frac{6}{25}$

39) "S" SE PUEDE ESCRIBIR:

$$S = 1 + \frac{3^1-1}{3^2} + \frac{3^3-1}{3^6} + \frac{3^5-1}{3^{10}} + \dots$$

DESDOBLANDO CADA FRACCIÓN:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6}\right) + \left(\frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^{10}}\right) + \dots$$

AGRUPANDO CONVENIENTEMENTE:

$$S = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots\right)}_{S_1} - \underbrace{\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^{10}} + \dots\right)}_{S_2}$$

CALCULAMOS LAS SUMAS LÍMITES

S_1 y S_2 :

$$+ S_1 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} \rightarrow S_1 = \frac{3}{8}$$

$$+ S_2 = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{81}} \rightarrow S_2 = \frac{9}{80}$$

$$\hookrightarrow S = 1 + \frac{3}{8} - \frac{9}{80} = \frac{101}{80}$$

40) obs: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}$

DESDOBLANDO SE OBTIENE:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

SEA LO PEDIDO S:

$$\hookrightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

EXTENDIENDO:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \dots$$

$$\therefore S = 1$$

41) SEA $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{k+2}$

$$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+2}$$

EXTENDIENDO:

$$S = \left(\frac{1}{6}\right)^6 + \left(\frac{1}{6}\right)^7 + \left(\frac{1}{6}\right)^8 + \left(\frac{1}{6}\right)^9 + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left[1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \dots \right]$$

$$\text{SUMA} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$S = \left(\frac{1}{6}\right)^6 \times \frac{6}{5} = \left(\frac{1}{6}\right)^5 \times \frac{1}{5} \times \frac{6}{5}$$

$$\therefore S = \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)$$

42) SEA $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+3n} \cdot \frac{n}{2}$

EXTENDIENDO:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$\text{SUMA} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

43) obs: $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}$

DESDOBLANDO: $= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

LOS PIDEN: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$

EXTENDIENDO:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$n \rightarrow S = \frac{1}{1} \therefore S = 1 \quad \text{X}$$

44) DEMOSTREMOS QUE: $2 \times 2^{n-1} = 2^n$

$$\rightarrow 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 2^{n-1}$$

$$\rightarrow 2^{n-1} = (1+2^{n-1}) - (1+2^{n-1})$$

SEA S LO PEDIDO (REEMPLAZAMOS ΔH):

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n) - (1+2^{n-1})}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

DESDOBLANDO:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+2^{n-1}} - \frac{1}{1+2^n} \right)$$

EXTENDIENDO:

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \quad \text{X}$$

45) SEA $S = \sum_{k=5}^{\infty} 3^{k-4} \left(\frac{1}{6} \right)^{k-6}$

"EL VALOR DE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE ES NUMÉRICAMENTE IGUAL AL VALOR DE LA SUMA"

Obs: $3^{k-4} \left(\frac{1}{6} \right)^{k-6} = 3^{k-4} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{k-4} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^2$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{k-4} \cdot 6^2$$

$$\Phi S = \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-4} \cdot 36 = 36 \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-4}$$

EXTENDIENDO:

$$S = 36 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \right)$$

SUMA LÍMITE (S.L.)

$$\rightarrow S.L. = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$\therefore S = 36 \quad \text{VALOR DE LA CONVERGENCIA} \quad \text{X}$$

46) SEA $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

EXTENDIENDO:

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \dots$$

• MULTIPLICAMOS POR 2:

$$2S = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots$$

DESDOBLANDO:

$$2S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots$$

$$n \rightarrow 2S = 1 \therefore S = \frac{1}{2} \quad \text{X}$$

47) SEA $b_n = \frac{\partial n}{1+2^n}$, ANALIZAMOS POR

CRITERIO DE COMPARACIÓN.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial n = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \partial n = \infty$

Obs: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\partial n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^n} = 1$

$\Rightarrow$ AMBAS SON DIVERGENTES.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial n = \partial \in \mathbb{R}^+$

$\Phi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\partial n} = \frac{1}{1+2} > 0$ AMBAS SON DIVERGENTES

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial n = \infty$

$\Phi \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial n}{1+2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^n} = 1 \neq 0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ES DIVERGENTE} \quad \text{X}$$

48) SEA $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{5^k} \right)$

EXTENDIENDO:

$$S = \frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^3} + \frac{7}{5^4} + \dots$$

MULTIPLICAMOS POR $1/5$:

$$\frac{1}{5}S = \frac{1}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{5}{5^4} + \dots$$

RESTANDO:

$$S - \frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} \left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots \right]$$

SUMA
LÍMITE $= \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$

$$\Rightarrow \frac{4S}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} \times \frac{5}{4}$$

$$\frac{4S}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \rightarrow \frac{4S}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore S = \frac{3}{8} \leftarrow \text{VALOR DE LA CONVERGENCIA}$$

49) SEA $f(k) = \frac{k^2 + 3k + 3}{k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k}$

FACTORIZANDO EL DENOMINADOR:

$$f(k) = \frac{k^2 + 3k + 3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

LUEGO, TRANSFORMANDO A FRACCIONES PARCIALES ES EQUIVALENTE A:

$$f(k) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$$

SI LLAMAMOS "S" A LO PEDIDO, SE TIENE:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$$

EXTENDIENDO PARA S_1 :

$$S_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$\Rightarrow S_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{LUEGO: } S = \frac{1}{2} S_1$$

$$\therefore S = \frac{2}{3} \leftarrow \text{VALOR DE CONVERGENCIA}$$

50) HALLEMOS CADA SUMA SEÑALADA:

$$(\phi) S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

EXTENDIENDO:

$$S_1 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$$

DESDOBLANDO CADA SUMANDO:

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$\Rightarrow S_1 = 1 \leftarrow \text{PUNTO DE CONVERGENCIA (M)}$$

$$(\dagger\dagger) 9n^2 + 3n - 2 = (3n-1)(3n+2)$$

$$\begin{array}{c} 3n \quad -1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3n \quad 2 \end{array}$$

$$\text{LUEGO: } S_2 = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

EXTENDIENDO:

$$S_2 = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots$$

* MULTIPLICAR POR 3:

$$3S_2 = \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots$$

DESDOBLANDO:

$$\frac{3S_2}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \dots$$

$$\text{DE AQUÍ: } S_2 = \frac{1}{6} \leftarrow \text{PUNTO DE CONVERGENCIA (N)}$$

$$(\dagger\dagger\dagger) \text{ SEA } S_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^k} \right)^{2k+1} \left[1 - \left(\frac{1}{\pi} \right)^{2k+1} \right]$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{\pi} \right)^{(k+1)^2+1} \right]$$

EXTENDIENDO:

$$S_3 = \left(\frac{1}{\pi} \right) - \left(\frac{1}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{1}{\pi} \right)^2 - \left(\frac{1}{\pi} \right)^5 + \left(\frac{1}{\pi} \right)^5 - \left(\frac{1}{\pi} \right)^6 + \dots$$

$$\text{PUNTO DE CONVERGENCIA (D)} \quad S_3 = \frac{1}{\pi}$$

$$\therefore M+N+D = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{\pi} = \frac{6\pi+6}{6\pi}$$

(51) BUSQUAMOS LAS EDADES DE LA J3

PERSONAS EN PROG. ARITMÉTICA,

$$\text{ASÍ: } \frac{a-r}{\text{MEJOR EDAD}} ; a ; a+r \quad \text{CON } r > 0$$

$$\text{DATO: } a - r + a + a + r = 63 \rightarrow a = 21$$

$$\text{DATO: } (21-r)^2 + (21)^2 + (21+r)^2 = 1395$$

$$2(21^2 + r^2) = 1395 - (21)^2$$

$$\text{DE AQUÍ: } 2(r^2) = 1395 - 3(21)^2$$

$$2(r^2) = 72 \rightarrow r^2 = 36$$

$$\text{DONDE: } r = 6 ; (r > 0)$$

$$\therefore \text{MEJOR EDAD} = 21 - 6 = 15$$

$$(52) \text{ DE } P_1 : \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{24}{3}$$

$$\text{OBS: RAZÓN} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$$

$$\# \text{ DE TÉRMS.} = 39$$

* CÁLCULO DE SU TÉRMS. GENERAL

$$a_x = a_1 + (x-1)r$$

$$\rightarrow a_x = \frac{1}{3} + (x-1)\left(-\frac{5}{6}\right) \dots (\alpha)$$

$$\text{DONDE: } x = 1; 2; 3; \dots; 39$$

$$\text{DE } P_2 : -\frac{4}{3} \cdot -\frac{31}{6} \cdot \dots \cdot -\frac{41}{2}$$

$$\text{OBS: RAZÓN} = -\frac{23}{6}$$

$$\# \text{ DE TÉRMS.} = 6$$

* CÁLCULO DE SU TÉRMS. GENERAL

$$a_y = a_1 + (y-1)r$$

$$\rightarrow a_y = -\frac{4}{3} + (y-1)\left(-\frac{23}{6}\right) \dots (\beta)$$

$$\text{DONDE: } y = 1; 2; 3; \dots 6$$

AHORA, SI a_x Y a_y PERTENECEN A AMBAS PROG. $\hookrightarrow a_x = a_y$

$$-\frac{1}{3} + (x-1)\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{4}{3} + (y-1)\left(-\frac{23}{6}\right)$$

EFFECTUANDO SE OBTIENE:

$$23y - 5x = 8$$

$$\begin{array}{l} \text{VALORES } y' \\ \text{VERIFICAN} \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 6 & 26 \end{array} \right.$$

CON ESTO:

$$\left. \begin{array}{l} + a_3 \text{ DE } P_1 = a_1 \text{ DE } P_2 = -\frac{4}{3} \\ + a_{26} \text{ DE } P_1 = a_6 \text{ DE } P_2 = -\frac{41}{2} \end{array} \right\} (+)$$

$$\therefore \text{SUMA DE ELLOS: } -\frac{131}{6}$$

52) SEAN LOS #3 ENTEROS EN P.A.:

$$a-r; a; a+r$$

$$\text{DATO: } (a-r) + a + (a+r) = (a-r)a(a+r)$$

$$n a^2 = (a^2 - r^2)a$$

$$\text{DE AQUÍ: } a^2 - a^2 = r^2 \dots (1)$$

$$\text{ó } a(a-r) = r^2 \rightarrow a > 0$$

$$\rightarrow a(a-r) > 0 \rightarrow a < 0 \vee a > 0$$

SI LOS TÉRMINOS SON ENTEROS

$$\Rightarrow a, r \in \mathbb{Z}$$

$$\cdot \text{SI } a=12, \text{ EN (1): } r=6 \text{ ó } -6$$

- PARA $a=12$ y $r=6$, LA P.A.

$$E: 6; 12; 18$$

- PARA $a=12$ y $r=-6$, LA P.A.

$$E: 18; 12; 6$$

EN CUALQUIERA DE ESTOS DOS

$$\text{CASOS: } \sum \text{DE TÉRM.} = 36$$

NOTA: PARA OTROS CASOS NO APARECE RESPUESTA

54) SUPONGAMOS QUE SE PREPARA COMIDA PARA t SEMANAS.

COMO SON 31 CONEJOS QUE CONSUMEN $6\frac{1}{2}$ Kg. SEMANALES CADA UNO, ENTONCES SE TIENE:

$$\begin{array}{l} \text{CANTIDAD DE} \\ \text{COMIDA QUE} = 31 \times \frac{13}{2} \times t \dots (1) \\ \text{SE PREPARÓ} \end{array}$$

LUEGO, SE DISMINUYE UN CONEJO SEMANAL HASTA EL ÚLTIMO CONEJO, LA COMIDA DURARÁ (2t) SEMANAS (DATO)

$\frac{15}{31c}$	$\frac{25}{30c}$	$\frac{35}{29c}$		$\frac{(2t)s}{0c}$
------------------	------------------	------------------	-------	--------------------

$$0s: 1+31 = 2+30 = \dots = 2t+0 = 32$$

$$\text{DONDE: } t=16$$

$$\text{EN (1): COMIDA PREP.} = 3024 \text{ Kg.}$$

55)

EN P.G.

$$+ a; b; c; d$$

EN P.A.

DE AQUÍ:

$$+ b = \frac{a+c}{2} \rightarrow 2b = a+c \dots (1)$$

$$+ c^2 = bd \dots (2)$$

$$\text{DATOS: } a+d=14 \wedge b+c=12$$

$$d=14-a \wedge c=12-b$$

REEMPLAZANDO EN (2):

$$(12-b)^2 = b(14-a) \dots (3)$$

$$\text{PERO: } \begin{cases} 2b = a+c \\ c = 12-b \end{cases}$$

$$\text{SUMANDO: } 2b+c = a+12-b$$

$$\rightarrow a = 3b - 12 \dots (4)$$

$$(4) \text{ EN (3): } (12-b)^2 = b(26-3b)$$

EFFECTUANDO SE OBTIENE:

$$2b^2 - 25b + 12 = 0 \rightarrow (b-8)(2b-9) = 0$$

DE AQUÍ: $b = 8 \vee b = 9/2$

* SI $b = 8$; $E_n(4)$: $a = 12$

Obs: $d = 2 \wedge c = 4$

∴ MAYOR DE ELLOS: $\frac{12}{x}$

NOTA: PARA $b = 9/2$ NO APARECE RESPUESTA.

56) LOS TÉRMINOS POSITIVOS:

* 3 ; x_2 y x_3 ESTÁN EN P.A.

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3+x_3}{2} \dots (1)$$

y * 3 ; y_2 ; y_3 ESTÁN EN P.G.

$$\Rightarrow y_2 = \sqrt{3y_3} \dots (2)$$

DATOS: $x_2 - y_2 = 6$ ($x_2 > y_2$) y $x_3 = y_3$

$$\underline{(1)-(2)}: x_2 - y_2 = \frac{3+x_3}{2} - \sqrt{3y_3}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{3+x_3}{2} - \sqrt{3x_3}$$

DE AQUÍ: $2\sqrt{3x_3} = x_3 - 9$

$$\underline{\text{AL Q}}: 12x_3 = x_3^2 - 18x_3 + 81$$

$$x_3^2 - 30x_3 + 81 = 0 \rightarrow (x_3 - 27)(x_3 - 3) = 0$$

DE AQUÍ: $x_3 = 27 \vee x_3 = 3$

* SI $x_3 = 27 \rightarrow y_3 = 27$

CON ESTO: $x_2 = 15$ y $y_2 = 9$

∴ RESPUESTA:

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n)$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{45} + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{39}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^3 (x_k + y_k) = 84 \quad x$$

NOTA: PARA $x_3 = 3$, SE OBTIENE

$x_2 = y_2 = 3$ PERO POR CONDICIÓN $x_2 - y_2 = 6$ ($\Rightarrow \Leftarrow$)

57) DE LA P.G.: 2 ; $(2+r)$; $(2+2r)$

SE CUMPLE: $(2+r)^2 = 2(2+2r)$

$$\rightarrow 4 + 4r + r^2 = 4 + 4r$$

$$\rightarrow r^2 = 0 \therefore r = 0 \quad x$$

58) DATOS: $t_{2n} = n t_n \dots (1)$

$$+ t_1 = n \dots (2)$$

LOS PIDEEN: $t_{n+1} = ?$

$$\underline{\text{DE (1)}}: t_n \cdot n = n t_n \rightarrow n = n$$

$$\underline{\text{DE LO PEDIDO:}} \quad t_{n+1} = t_1 \cdot n$$

$$\Rightarrow t_{n+1} = t_1 \cdot n = n \cdot n \therefore t_{n+1} = n^2 \quad x$$

59) SEA LA P.G. DE n TÉRMINOS Y DE RAZÓN q

DATOS: $t_1 = 7$; $t_n = 567$; $S_n = 847$

PODEMOS SABER: $t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$

$$\Rightarrow 567 = 7 \cdot q^{n-1} \rightarrow 81 = \frac{q^n}{q}$$

$$\rightarrow 81q = q^n \quad (1)$$

$$\text{ADEMÁS: } S_n = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

$$\rightarrow \frac{847}{121} = \frac{81q-1}{q^2-1}$$

DE AQUÍ, SE OBTIENE: $q=3$

$$\text{EJ } (a): 3^n = 81 \times 3 \rightarrow 3^{(n)} = 3^{(5)}$$

$$(b): n=5$$

$$\text{FINALMENTE: } n+q=8$$

60) SEA LA P.G. DE RAZÓN q :

$$\therefore 3; \dots; 384$$

$$\# \text{ DE M.G.} = m$$

OJO: LA RAZÓN DE INTERPOLACIÓN NO ES OTRA COSA QUE LA RAZÓN DE LA P.G.

$$\hookrightarrow q = \frac{m+1\sqrt{384}}{3} \rightarrow q = \frac{m+1\sqrt{128}}{3}$$

$$\text{O TAMBIÉN: } q^{m+1} = 128$$

AHORA, SEGÚN FÓRMULA LA SUMA DE TODOS LOS TÉRMINOS (S_{m+2})

$$\text{EJ: } S_{m+2} = t_1 \left(\frac{q^{m+2}-1}{q-1} \right)$$

$$\frac{378 + 3 + 387}{165} = 3 \left(\frac{q^{m+2}-1}{q-1} \right)$$

$$\text{AQUÍ: } 255(q-1) = 128q-1$$

$$\text{RESOLVIENDO: } q=2$$

61) DADA LA P.G. DE n TÉRMINOS Y RAZÓN q :

$$\therefore t_1; \dots; t_n$$

$\Rightarrow$ SE CONOCE QUE:

$$+ \text{ SUMA DE TODOS LOS TÉRMINOS} = t_1 \left(\frac{q^n-1}{q-1} \right) = S \dots (1)$$

$$+ \text{ PRODUCTO DE TODOS LOS TÉRMINOS} = \sqrt{(t_1 t_n)^n} = P$$

$$\text{DE AQUÍ: } P^2 = (t_1 t_n)^n \dots (2)$$

ADemás:

$$+ \text{ SUMA DE LOS RECÍPROCOS DE TODOS SUS TÉRMINOS} = \frac{1}{t_n} \left(\frac{q^n-1}{q-1} \right) = S' \dots (3)$$

$$\cdot (1) \div (3): t_1 \times t_n = \frac{S}{S'}$$

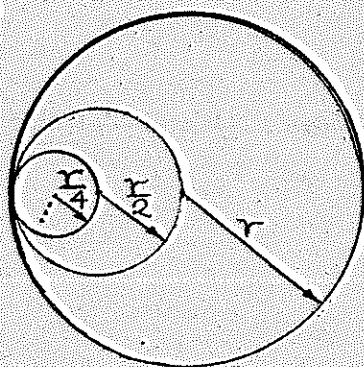
$$\text{ELEVAMOS A LA } n: (t_1 \times t_n)^n = \left(\frac{S}{S'} \right)^n$$

$\downarrow$

$$\cdot \text{ POR (2)} \rightarrow P^2 = \left(\frac{S}{S'} \right)^n$$

CON EL DATO, VEMOS QUE: $x=n$

62)



$$\begin{aligned} \text{ÁREA} &= A_{C_1} + A_{C_2} + A_{C_3} + A_{C_4} + \dots \\ \text{TOTAL} &= \pi r^2 + \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{r}{8}\right)^2 + \dots \\ &= \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\text{SUMA}}{\text{LÍMITE}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{ÁREA TOTAL} = \frac{4\pi r^2}{3}$$

63) TENGA EN CUENTA QUE:

$$2! + 2(2!) = (2+1)!$$

SUMAMOS 1 A AMBOS MIEMBROS EN LA IGUALDAD DADA, SE TENDRÁ:

$$1 + 1 + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 719 + 1$$

$$2! + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$3!$$

$$4!$$

$$5! \dots$$

$$(n+1)! = 6!$$

$$\text{DE AQUÍ: } n+1 = 6 \therefore n = 5$$

64) EN GENERAL:

$$\begin{aligned} n! + (n+1)! &= n! + (n+1)(n!) \\ &= (n!)(1 + n+1) \end{aligned}$$

$$n! + (n+1)! = n! (n+2)$$

APLICANDO EN EL PROBLEMA:

$$[1(3)] [2(4)] [3(5)] \dots [19(24)]$$

$$20! 19! 18! \dots 3! 2! 1!$$

CANCELANDO LOS FACTORIALES:

$$J = \frac{3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 20 \times 21}{20!}$$

$$J = \frac{3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 20 \times 21}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 20} = \frac{21}{2}$$

$$\therefore J = 10,5$$

68

LO REALIZA DE:

PRIMER PASO	2 FORMAS
SEGUNDO PASO	2 FORMAS
TERCER PASO	2 FORMAS
CUARTO PASO	2 FORMAS

OBJ: # DE TRAYECTORIAS < > # DE FORMAS
 $\therefore$ # TOTAL DE TRAYECTORIAS ES:
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

69 DÍGITOS A USAR {3; 4; 5; 6; 7; 8}

NÚMEROS A FORMAR: $\overline{abc}$

DE VALORES QUE PUEDE TOMAR $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $\rightarrow 6 \ 5 \ 4$

OBJ: CUANDO A TOMA CUALQUIERA DE LOS 6 VALORES, ENTONCES, B PUEDE TOMAR CUALQUIERA DE LOS 5 RESTANTES MIENTRAS QUE C SÓLO PODRÁ TOMAR CUALQUIERA DE LOS 4 VALORES RESTANTES.

TOTAL DE #S DE 3 DÍGITOS $= 6 \times 5 \times 4 = 120$

70 SUPONGAMOS LA DISTRIBUCIÓN SIGUIENTE:

P	E	h_1	h_2	h_3
---	---	-------	-------	-------

AHOR: EL # DE MANERAS EN QUE PUEDEN SENTARSE INTERCAMBIANDO LOS ASIENTOS ES:

$P_5 = 5! = 120$

71 SUPONGAMOS LA DISTRIBUCIÓN:

H_1	H_2	H_3	H_4	M_1	M_2	M_3
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

SE CONSIDERA COMO UN SOLO ELEMENTO

EL # DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN SENTAR TAL QUE ELAS 3 SIEMPRE ESTÉN JUNTAS, VIENE DADO POR: $P_5 = 5! = 120$

OTO: PERO ENTRE ELAS PUEDE HABER INTERCAMBIO DE POSICIONES Y COMO SON 3, ENTONCES, EL # DE MANERAS DE INTERCAMBIAR ASIENTOS ENTRE ELAS ES:

$P_3 = 3! = 6$

LUEGO: LO PEDIDO VIENE DADO POR: $120 \times 6 = 720$

72 CIFRAS A USAR: 1; 2; 3; 4

#S A FORMAR: $\overline{abcd} < 2367$

(1°) $\overline{1bcd}$

DE MANERAS DE INTERCAMBIAR ESTOS #S ES: $P_3 = 3! = 6$

¿AQUÍ, EXISTEN YA: 6 #S?

(2°) $\overline{2bcd}$

IGUAL AL ANTERIOR: $P_3 = 3! = 6$

¿AQUÍ, TAMBIÉN EXISTEN 6 #S PERO... TENDRÍAN QUE DESCONJUNTARSE LOS #S QUE SON MAYORES QUE 2367. ÉSTOS SON:

2413 y 2431

∴ # TOTAL DE NÚMEROS

$$\text{PEDIDOS ES: } 6 + 6 - 2 = \underline{10} \quad \times$$

(13) * EL # DE FORMAS EN QUE SE PUEDE
ORDENAR LOS 9 LIBROS ES:

$$9_9 = 9!$$

* EL # DE FORMAS EN QUE SE PUEDE
ORDENAR LOS 9 LIBROS DE MANERA
QUE 3 DE ELLOS SIEMPRE ESTÉN
JUNTOS (LOS 3 HACER COMO UN SO
LO ELEMENTO), ES: $7! = 7!$, PERO
ENTRE LOS 3 SE PUEDEN PERMUTAR

$$\hookrightarrow \# \text{ TOTAL DE FORMAS} = 7! \times 3!$$

$$\therefore \text{LO PEDIDO ES: } 9! - 7! \times 3! = \underline{332640} \quad \times$$

(14) DÍGITOS A USAR: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

LOS NÚMEROS PARES MAYORES QUE
500000, QUE SE PUEDEN FORMAR
CON DICHS DÍGITOS, NECESARIA-
MENTE TIENEN QUE EMPEZAR CON
LA CIFRA 5 Ó 6.

ES DECIR, LOS #S SON DE LA FORMA

5abcde ó 6abcde

CASO (1)

5abcde

SE PUEDE $\uparrow$ POR SER PAR, SÓLO
PERMUTAR PUEDE TOMAR 3
DE 4! = 24 VALORES
MANERAS

$$\hookrightarrow \text{CANTIDAD DE } \#s = 1 \times 24 \times 3 = \underline{72} \quad \times$$

(CASO 1)

CASO (2)

6abcde

COMO LA 1ª CIFRA
SIMILAR ES PAR, 2 PUEDE
AL CASO (1) TOMAR SÓLO 2
VALORES

$$\hookrightarrow \text{CANTIDAD DE } \#s = 1 \times 24 \times 2 = \underline{48} \quad \times$$

(CASO 2)

* LA CANTIDAD TOTAL DE #S PARES
MAYORES QUE 5×10^5 ES:

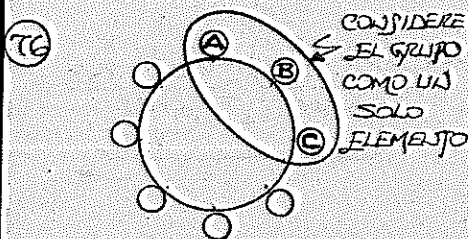
$$72 + 48 = \underline{120} \quad \times$$

(15) ESTE EJERCICIO CORRESPONDE A
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN
NÓTESE QUE INTERVIENEN 10 ELE-
MENTOS (5 BOLSAS AZULES, 3 BLAN-
CAS y 2 NEGRAS).

⇒ # DE MANERAS DIFERENTES EN Q'
SE PUEDE COLOCAR DICHS BO-
LAS EN FILA ES: $\frac{10!}{5! 3! 2!}$

$$\text{ESTO ES: } \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}!}{\cancel{5!} \times 2}$$

$$\text{OBTENIENDO: } \underline{2520} \quad \times$$



LO QUE TENEMOS QUE HALLAR ES

EL NÚMERO DE PERMUTACIONES ALREDEDOR DE LA MESA DE 6 ELEMENTOS (PERMUTACIÓN CIRCULAR). ESTO ES:

$$P_c(6) = 5! = 120 \text{ MANERAS}$$

OJO: PERO SI (A) y (C) INTERCAMBIAN DE POSICIÓN, (B) SIGUE ESTANDO ENTRE ELLOS DOS.

PARA ESTE CASO SE PRESENTARÁN 120 MANERAS MÁS.

$$\therefore \# \text{ TOTAL DE MANERAS} = 240$$

(7)

TRABAJEMOS POR SEPARADO CON EL NUMERADOR (N) Y DENOMINADOR (D) DE LA FRACCIÓN. DESARROLLANDO SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\begin{aligned} N &= C_r^n + C_{r-1}^n + 2C_{r-1}^n + 2C_{r-2}^n + C_{r-2}^n + C_{r-3}^n \\ &= C_r^n + 2C_{r-1}^n + C_{r-2}^n \\ &= C_r^n + C_{r-1}^n + C_{r-1}^n + C_{r-2}^n + C_{r-2}^n \\ &= C_r^n + C_{r-1}^n + C_{r-1}^n + C_{r-2}^n + C_{r-2}^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N = C_r^{n+3}$$

$$\begin{aligned} D &= C_{r-1}^n + C_{r-2}^n + C_{r-2}^n + C_{r-3}^n \\ &= C_{r-1}^n + C_{r-2}^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = C_{r-1}^{n+2}$$

REEMPLAZANDO:

$$\frac{C_r^{n+3}}{C_{r-1}^{n+2}} = \frac{37-r}{r} \rightarrow \frac{n+3}{r} \cdot \frac{C_r^{n+2}}{C_{r-1}^{n+2}} = \frac{37-r}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{n+3}{r} = \frac{37-r}{r} \therefore n+r=34$$

(8)

$$\cdot DE H : 3 \binom{10x}{3} = 4196 \binom{5x}{2}; x \in \mathbb{Z}^+$$

DESARROLLANDO LOS COEFICIENTES BINÓMICOS:

$$3 \frac{(10x)(10x-1)(10x-2)}{6} = \frac{4196(5x)(5x-1)}{2}$$

$$2(5x)(10x-1)2(5x-1) = 4196(5x)(5x-1)$$

$$C = 4(10x-1) = 4(1049)$$

$$10x-1 = 1049 \rightarrow x = 105$$

$$\text{LUEGO: } H = \{105\} = \{abc\}$$

$$\therefore a+b+c = 6$$

(9) POR COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS:

$$C_{x+1}^{2x} = C_{x-1}^{2x}; C_{x+2}^{2x} = C_{x-2}^{2x}$$

REEMPLAZANDO TENEMOS:

$$\frac{2C_{x-1}^{2x}}{2C_{x-2}^{2x}} = \frac{19}{16}$$

RECUERDE

$$C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

APLICANDO EN EL NUMERADOR:

$$\frac{(2x) - (x-1) + 1}{x-1} \cdot \frac{2x}{x-2} = \frac{19}{16}$$

$$\text{DEBIL: } \frac{x+2}{x-1} = \frac{19}{16}$$

$$\text{RESOLVIENDO: } x = 17$$

$$\textcircled{80} \cdot \text{DE } C_{y-1}^x = C_y^x$$

ÚNICA POSIBILIDAD:

$$y-1+y = x \rightarrow x = 2y-1$$

$$\cdot \text{DE } 4C_y^x = 5C_{y-2}^x$$

REEMPLAZANDO X:

$$4C_y^{2y-1} = 5C_{y-2}^{2y-1}$$

$$4C_y^{2y-1} = 5C_{y+1}^{2y-1}$$

DEGRADANDO:

$$4C_y^{2y-1} = 5 \times \frac{y-1}{y+1} C_y^{2y-1}$$

$$4(y+1) = 5(y-1)$$

$$\text{RESOLVIENDO: } y = 9 \rightarrow x = 17$$

$$\therefore J = 3(17) + 7(9) = 114$$

RECUERDE

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$$

PARA APLICAR EN EL PROBLEMA

SUMAMOS C_0^n y C_n^n

$$(\text{OJO: } C_0^n = C_n^n = 1)$$

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_{n-1}^n + C_n^n = 30$$

CONOCIDO

$$\rightarrow 2^n = 30 + 1 + 1 \rightarrow 2^n = 32$$

$$\therefore n = 5$$

$$\textcircled{82} \cdot M = \# \text{ DE MANEJOS DISTINTOS} = C_5^{20}$$

• N: DEBEN CONTEGER 2 ASEJ



SON ASEJ NO SON ASEJ



$$C_2^4$$

$$\times C_3^{16} = N$$

POR TANTO:

M +

N

$$18864$$

$$\textcircled{83} \cdot 12 \text{ PREGUNTAS: } A; B; C; \dots; M$$

* SI SE ESCOGE A y NO B $\rightarrow$ HAY 9 ESCOGER 4 PREGUNTAS DE LAS 10 RESTANTES $\rightarrow$ # DE FORMAS: C_4^{10} * SI SE ESCOGE B y NO A (SIMILAR AL ANTERIOR $\rightarrow$ # DE FORMAS: C_4^{10} * SI NO ESCOGE A NI B $\rightarrow C_5^{10}$

$$\therefore \# \text{ TOTAL DE FORMAS: } 2 \cdot C_4^{10} + C_5^{10} = 612$$

$$\textcircled{84} \cdot \# \text{ DE JUGUETES: } 12$$

• PARA EL 1º NIÑO; EL # DE MANERAS EN QUE SE LE DISTRIBUYE LOS 12 JUGUETES DE TAL MANERA QUE RECIBA 4 ES: C_4^{12}

• PARA EL 2º NIÑO, EL # DE MANERAS EN QUE SE LE PUEDE DISTRIBUIR

3 JUQUETES DE MANERA QUE RECI-
BA 4 EJ: C_4^8

• PARA EL 3ER NIÑO, EL # DE MA-
NERAS EN QUE SE LE DISTRIBUIR

4 JUQUETES DE MANERA QUE RE-
CIBA 4 EJ: C_4^4

POR PRINCIPIO DE LA MULTIPLI-
CACIÓN, LO PEDIDO VIENE DADO

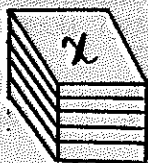
$$\text{POR: } C_4^{12} \times C_4^8 \times C_4^4$$

CALCULANDO C/U SE TIENE:

$$495 \times 70 \times 1 = 34650$$

85) 4 LIBROS DE A

5 LIBROS DE X



DE MANERAS
DE ESCOGER 2
LIBROS DE A:

$$C_2^4$$

DE MANERAS
DE ESCOGER 3
LIBROS DE X:

$$C_3^5$$

POR PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN

DE MANERAS DE ESCOGER 5 LIBROS,
DONDE 2 SON DE A Y 3 DE X:

$$C_2^4 \times C_3^5 = 6 \times 10 = 60$$

86) EL # TOTAL DE MANERAS EN QUE
SE PUEDEN AGRU PAR LOS 25 PROFE-
SIONALES EN GRUPOS DE 3 EJ: C_3^{25}

• EL # TOTAL DE MANERAS EN QUE
SE PUEDE LOS PROFESIONALES EN
GRUPOS DE 3 SIN QUE PARTICIPE

NINGÚN CIRUJANO, EJ: C_3^{21}

LUEGO: EL # DE MANERAS EN QUE
PUEDE FORMARSE GRUPOS DE 3, DON-
DE POR LO MENOS UNO DE ELLOS
SEA CIRUJANO, EJ:

$$C_3^{25} - C_3^{21} = 90$$

87) SUPONGAMOS QUE EL TÉRMINO EN
 $x^{28} y^{18}$ OCUPA LUGAR K+1:

$$\text{DE } (x^2 + y^3)^{20}$$

$$\begin{aligned} \text{En } T_{K+1} &= C_K^{20} (x^2)^{20-K} (y^3)^K \\ &= C_K^{20} x^{40-2K} y^{3K} \\ &\quad \text{COEF.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DE AQUÍ: } & \begin{cases} 40-2K=28 \\ 3K=18 \end{cases} \Rightarrow K=6 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{COEF. PEDIDO: } C_6^{20}$$

88) DE $(1+y)^{52}$

$$T_{2m+1} = C_{2m}^{52} y^{2m}$$

$$T_{m+2} = C_{m+1}^{52} y^{m+1}$$

$$\text{POR CONDICIÓN: } C_{2m}^{52} = C_{m+1}^{52}$$

POSIBILIDADES:

$$(i) 2m = m+1 \rightarrow m=1 \quad \text{X} \\ (\text{E TRATARÍA DEL MISMO TÉRM.})$$

$$(ii) 2m(m+1) = 52 \rightarrow m=17$$

$\therefore$ LOS TÉRMINOS SON DE LUGARES

$$35 \text{ y } 19$$

89) DE $(x^3 - 3y)^{104}$

$\hookrightarrow t_{103} = C_{102}^{104} (x^3)^2 (3y)^{102}$

(LUGAR)

IMPAR $\therefore t_{103} = C_{102}^{104} x^6 y^{34}$

90) DE $(x^3 + \frac{1}{y^2})^n$

$\hookrightarrow t_n = C_{n-1}^n (x^3)^{n-1} (y^{-2})^1$

LUEGO:

$C_{n-1}^n x^{3(n-1)} y^{-2} = p x^{18} y^{-2}$

así: $3(n-1) = 18 \rightarrow n = 7$

$C_{n-1}^n = C_1^n = n = p \rightarrow p = 7$

$\therefore T = 7 \times 7 = 49$

91) Si $(x^3 - \frac{2}{x^2})^n$ TIENE UN ÚNICO

TÉRMINO CENTRAL $\hookrightarrow n$ ES PAR

DICHO TÉRMINO OCUPA LUGAR

$(\frac{n}{2} + 1)$.

$\hookrightarrow t_c = t_{(\frac{n}{2}+1)} = C_{\frac{n}{2}}^n (x^3)^{\frac{n}{2}} (2x^{-2})^{\frac{n}{2}}$

DE AQUÍ: PARTE VARIABLE = $x^{\frac{3n}{2} - n}$

USANDO EL DATO: $x^{\frac{n}{2}} = x^4 \hookrightarrow n = 8$

LUEGO, EL TÉRMINO PEDIDO ES:

$t_7 = +C_6^8 (x^3)^2 (2x^{-2})^6$

$= C_2^8 \times 2^6 \times x^{-6} = \frac{8 \times 7 \times 64}{2} x^{-6}$

$\therefore t_7 = 1792 x^{-6}$

92) DE $(x^p + x^q)^n$

$\hookrightarrow t_{10} = C_9^n (x^p)^{n-9} (x^q)^9$

PERO POR DATO: $t_{10} = 1x^{18}$

$\hookrightarrow t_{10} = C_9^n x^{p(n-9)+9q} = 1x^{18}$

DE AQUÍ:

$+ C_9^n = 1 \rightarrow n = 9$

$+ p(n-9)+9q = 18 \rightarrow q = 2$

$\therefore q+n = 11$

93) DESARROLLANDO SE TIENE:

$(x^m + x^{-\frac{m}{3}})^n = \underbrace{C_n^0 x^{mn}}_{\text{EXP. DE } x} + \underbrace{C_n^1 x^{mn-1} x^{-\frac{m}{3}}}_{mn-m-\frac{m}{3}} + \dots$

EXP. DE $x \rightarrow mn - m - \frac{m}{3}$

POR DATO:

$mn - (mn - m - \frac{m}{3}) = 8$

$\rightarrow m + \frac{m}{3} = 8 \rightarrow m = 6$

$\hookrightarrow$ EL BINOMIO ES: $(x^6 + x^{-2})^n$

$\hookrightarrow t_{13} = C_{12}^n (x^6)^{n-12} (x^{-2})^{12}$

$= C_{12}^n x^{6n-96} = T.I.(x)$

DE AQUÍ: $6n - 96 = 0 \rightarrow n = 16$

$\therefore$ # DE TÉRMINOS

DEL DESARROLLO: $16 + 1 = 17$

94) SUPONGAMOS QUE EL EXPONENTE SEA "n"

$\hookrightarrow$ SE TIENE: $(x^2 + \frac{1}{2x})^n$

DE AQUÍ:

$$t_{11} = C_{10}^n (2)^{n-10} \left(\frac{1}{20}\right)^{10}$$

08) GRADO (t_{11}) = $2(n-10) - 10$

POR DATO: $2(n-10) - 10 = 20$

DESPEJANDO: $n = 25$

95) RECUERDE

DE $P(x,y) = (Ax^p + By^q)^n$

SE TIENE:

$\sum$ DE GRADOS
ABSOLUTOS
DE TODOS LOS
TERMINOS DEL
DESARROLLO

$$= (p+q) \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

EN EL PROBLEMA:

DEL DESARROLLO DE $(4x^3 + 3y^2)^n$

SE TIENE:

$\sum$ DE GRADOS
DE TODOS LOS
TERMINOS

$$= (3+2) \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

DE AQUÍ: $5 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = 275$ (DATO)

No $\frac{n(n+1)}{2} = 55 \rightarrow n(n+1) = 110$

O TAMBIÉN: $n(n+1) = 10 \times 11$
 $\therefore n = 10$